"ELLIPS VA UNING XARAKTERISTIKALARI"

***G`afforova Xosiyat Umar qizi*** *Navoiy viloyat Qiziltepa tuman 2 - son kasb hunar maktabi Matematika fani o`qituvchisi*

Isoqov Olim Qalandarovich *Navoiy viloyat Qiziltepa tuman 2 - son kasb hunar maktabi Matematika va informatiak fani o`qituvchisi*

ANNOTATSIYA

Ushbu maqolada majburiy fan hisoblangan "Analitik geometriya" dan barcha o'quv yurtlari uchun bakalavr yo'nalishi bo'yicha "Matematika va informatika" bo'limida tahsil oladigan talabalar uchun "Ellips va uning xarakteristikalar" mavzusi batasil bayon etilgan. Shu bilan birga mazkur maqolada Tekislikda I tartibli tenglamalar faqat va faqat to‘g‘ri chiziqlarni ifodalashi,ammo tekislikda II tartibli tenglamalarga turli chiziqlar mos keladi va ular II tartibli chiziqlar deyilishi haqida so'z borgan. Ulardan biri ellips bo‘lib hisoblanadi. Ellipsning grafigini qisilgan aylana kabi tasavvur etish mumkin. Ellipsning o‘ziga xos xususiyati shundan iboratki, uning ixtiyoriy nuqtasidan fokuslar deb ataluvchi ikkita nuqtalargacha bo‘lgan masofalar yig‘indisi o‘zgarmas sondir. Ellipslar amaliyotda ko‘p uchraydi va keng qo‘llaniladi. Masalan, planetalar Quyosh atrofida ellips bo‘yicha aylanadi. Ellipsning xususiyatlari uning kanonik tenglamasi bo‘yicha o‘rganiladi. Bunda uning ekssentrisitet, direktrisa va fokal radiuslar kabi xarakteristikalaridan foydalaniladi. Shuni ta’kidlab o‘tish kerakki, bizga maktabdan tanish bo‘lgan aylana ellipsning xususiy bir holidir. Mazkur maqolada shular yoritib berilgan.

Kalit so`zlar: Ikki o‘zgaruvchili II tartibli tenglamalar, tekislikdagi II tartibli chiziqlar, aylana, aylana markazi, aylana radiusi, aylananing normal tenglamasi, aylananing kanonik tenglamasi, aylananing umumiy tenglamasi, ellips, ellipsning fokuslari, ellipsning kanonik tenglamasi, ellipsning uchlari ellips o‘qlari, fokal radiuslar, ellips ekssentrisiteti, ellips direktrisalari.

IKKINCHI TARTIBLI CHIZIQLAR

1.1 II tartibli tenglama va chiziqlar.

Bu bobda har qanday I tartibli $Ax+By+C=0$ tenglama tekislikda biror to‘g‘ri chiziqni aniqlashini va aksincha, tekislikdagi har qanday to‘g‘ri chiziq I tartibli tenglamaga ega bo‘lishini bilamiz va II tartibli tenglama va chiziqlar haqida to’xtalamiz va misollarda ko‘rib chiqamiz.

Endi tekislikda II tartibli tenglamalarni qaraymiz. Bu tenglamalarning umumiy ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad (1.1.1)$$

Bunda (1.1.1) tenglamadagi A, B, C koeffitsiyentlardan kamida bittasi noldan farqli, ya’ni $A^2+B^2+C^2 \neq 0$ shart bajarilishi kerak. Aks holda (1.11) tenglama I tartibli tenglamaga aylanadi.

1.1.1-TA’RIF: Tenglamasi (1.1.1) ko‘rinishda bo‘lgan tekislikdagi chiziqlar ***II tartibli chiziqlar*** deb ataladi.

Biz quyida bunday chiziqlarning turlari bilan tanishib chiqamiz. Hozircha esa (1.1.1) tenglama har doim ham biror egri chiziqni ifodalashi shart emasligini misollar orqali ko‘rsatamiz.

1.1.1-misol. (1.1.1) tenglamadan A=1, C=–1,B=D=E=F=0 holda hosil bo‘ladigan II tartibli $x^2-y^2=0$ tenglama ikkita I tartibli $y=\pm x$ tenglamalarga ajraladi va ikkita to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi.

1.1. 2-misol. A=C=F=1, D=–1, B=E=0 holda (1.1.1) tenglama

$x^2+y^2-2x+1=0 \Rightarrow (x-1)^2+y^2=0$

ko‘rinishga keladi va uni faqat bitta M(1,0) nuqta qanoatlantiradi.

1.1 3-misol. A=C=F=1, D=B=E=0 holda (1.1.1) tenglama $x^2+y^2+1=0$ ko‘rinishga keladi va uni birorta ham nuqta qanoatlantirmaydi, ya’ni bu tenglama bo‘sh to‘plamni ifodalaydi.

1.2.Aylana va uning tenglamalari.

Bizga maktabdan tanish bo‘lgan aylana ta’rifini eslaymiz.

1.2.1-TA’RIF: Berilgan M(a,b) nuqtadan bir xil R masofada joylashgan tekislikdagi nuqtalar to‘plami (geometrik o‘rni) ***aylana*** deb ataladi. Bunda M(a,b) nuqta aylananing ***markazi***, R soni esa aylananing ***radiusi*** deyiladi.

Markazi M(a,b) nuqtada va radiusi R bo‘lgan aylananing tenglamasi

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \qquad (1.2.1)$$

ko‘rinishda bo‘lishini oldin ko’rib o‘tgan edik. (1.2.1) aylananing ***normal tenglamasi*** deb ataladi va undan aylana II tartibli egri chiziq ekanligi ko‘rinadi. Agar aylana markazi O(0,0) koordinata boshida joylashgan bo‘lsa, uning tenglamasi

$$x^2+y^2=R^2$$

ko‘rinishda bo‘ladi va u aylananing ***kanonik tenglamasi*** deyiladi.

Endi umumiy holdagi II tartibli (1.2.1) tenglama qaysi shartda aylanani ifodalashini aniqlaymiz. Qisqa koʻpaytirish formulalardan foydalanib (1.2.1) tenglamani

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0 \qquad (1.2.2)$$

koʻrinishga keltiramiz. Bu yerdan aylananing (3) tenglamasi (1.2.1) umumiy tenglamadan

$$A=C=1,\ B=0,\ D=-2a,\ E=-2b; \qquad F=a^2+b^2-R^2$$

boʻlgan holda kelib chiqishini koʻramiz..

Endi qanday holda (1.2.1) umumiy tenglama aylanani ifodalashini aniqlaymiz. (1.2.2)tenglamadan koʻrinadiki birinchi navbatda B=0 va A=C boʻlishi kerak. Bu holda $A^2+B^2+C^2\neq 0$ shartdan $A=C\neq 0$ ekanligi kelib chiqadi va (1) tenglama ushbu

$$Ax^2+Ay^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad (1.2.3)$$

koʻrinishda boʻladi. Bu tenglamani (1.2.1) koʻrinishga keltirish uchun uni $A\neq 0$ soniga boʻlamiz va toʻliq kvadratlarni ajratamiz:

$$Ax^2+Ay^2+2Dx+2Ey+F=0 \Rightarrow x^2+y^2+2\frac{D}{A}x+2\frac{E}{A}y+\frac{F}{A}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{D}{A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{A}\right)^2+\frac{AF-D^2-E^2}{A^2}=0 \Rightarrow$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2=\frac{D^2+E^2-AF}{A^2}. \qquad (5)$$

Bunda $a=-D/A$ va $b=-E/A$ belgilash kiritilgan. Bu yerda $\Delta=D^2+E^2-AF$ ishorasiga qarab uch hol boʻlishi mumkin.

I hol: $\Delta<0$. Bu holda (5) tenglama boʻsh toʻplamni (mavhum aylanani) ifodalaydi, chunki uning chap tomoni doimo nomanfiydir.

II hol: $\Delta=0$. Bu holda (5) tenglama faqat bitta $M(a,b)$ nuqtani (markazi shu nuqtada va radiusi R=0 boʻlgan aylanani) ifodalaydi.

III hol: $\Delta>0$. Bunda $\Delta=R^2$ deb belgilash mumkin va (5) tenglama (2) koʻrinishni oladi, ya’ni aylanani ifodalaydi.

Demak, (1.2.3) koʻrinishdagi II tartibli tenglamada $D^2+E^2-AF=\Delta>0$ shart bajarilsa, u $M(a,b)$ markazining koordinatalari $a=-D/A$ va $b=-E/A$, radiusi esa

$$R=\frac{\sqrt{D^2+E^2-AF}}{|A|}$$

bo‘lgan aylanani ifodalaydi va (1.2.3) ***aylananing umumiy tenglamasi*** deb aytiladi.

Masalan, $x^2+y^2-2x+6y-15=0$ tenglamani qaraymiz. Bu tenglamada

$$A=C=1,\ D=-1,\ E=3,\ F=-15,\ D^2+E^2-AF=1+9-(-15)=25>0.$$

Demak, bu tenglama markazi M(1, –3) va radiusi R=5 bo‘lgan aylanani ifodalaydi. Haqiqatan ham

$$x^2+y^2-2x+6y-15=0 \Rightarrow (x-1)^2-1+(y+3)^2-9-15=0 \Rightarrow (x-1)^2+(y+3)^2=25=5^2.$$

Berilgan M(a,b) nuqtadan bir xil R masofada joylashgan tekislikdagi nuqtalar to‘plami (geometrik o‘rni) ***aylana*** deb ataladi. Bunda M(a,b) nuqta aylananing ***markazi***, R soni esa aylananing ***radiusi*** deyiladi.

Markazi M(a,b) nuqtada va radiusi R bo‘lgan aylananing tenglamasi

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

Tenglama ko’rinishida bo’ladi.

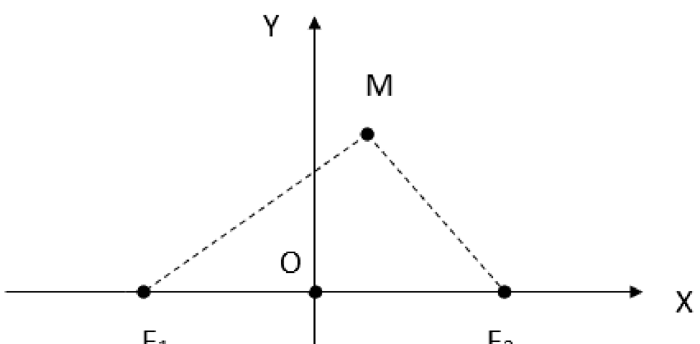
ELLIPSNING TENGLAMASI VA XARAKTERISTIKALARI

2.1. Ellips va uning kanonik tenglamasi.

Dastlab ellips ta’rifini keltiramiz**.**

2.1.1-TA’RIF: Berilgan ikkita F_1 va F_2 nuqtalargacha masofalarining yig‘indisi o‘zgarmas songa teng bo‘lgan tekislikdagi nuqtalarining geometrik o‘rni ***ellips*** deb ataladi. Bunda F_1 va F_2 nuqtalar ellipsning ***fokuslari*** deyiladi.

Ta’rif bo‘yicha ellips tenglamasini keltirib chiqaramiz. Buning uchun F_1 va F_2 fokuslar orasidagi masofani 2c, ellipsning ixtiyoriy M(x,y) nuqtasidan fokuslarigacha bo‘lgan masofalar yig‘indisini $|MF_1|+|MF_2|=2a$ deb belgilaymiz. XOY Dekart koordinatalar sistemasini quyidagicha kiritamiz. OX o‘qini F_1 va F_2 fokuslar orqali, OY o‘qini esa fokuslar o‘rtasidan o‘tkazamiz (26-rasmga qarang). Bunda F_1 va F_2 fokuslar koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik joylashadi va, belgilashimizga asosan $|F_1F_2|=2c$ bo‘lgani uchun, $|OF_1|=|OF_2|=c$ bo‘ladi. Shu sababli bu fokuslar $F_1(-c,0)$ va $F_2(c,0)$ koordinatalarga ega bo‘ladi.



26-rasm

Bu holda, ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga asosan,

$$|MF_1| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\ , \quad |MF_2| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

va, ellips ta'rifiga asosan,

$$|MF_1| + |MF_2| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a\,.$$

Bu tenglikni quyidagicha soddalashtiramiz:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\,]^2 = [2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,]^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4a^2 - 4xc = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow (a^2 - xc)^2 = [a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,]^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^4 - 2a^2xc + (xc)^2 = a^2(x-c)^2 + a^2y^2 \Rightarrow$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \qquad (6)$$

Yuqoridagi chizmadagi F_1MF_2 uchburchakdan uchburchak tengsizligiga asosan

$|MF_1|+|MF_2|>|F_1F_2|$ => $2a>2c>0$ => $a^2- c^2 >0$

Ekanligini ko'ramiz.

Shu sababli $a^2-c^2 = b^2$ deb belgilab olish mumkin. Bu belgilashda (6) tenglama $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ ko'rinishga keladi. Bu tenglamani a^2b^2 ifodaga bo'lib, ushbu tenglamaga kelamiz:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b^2 = a^2 - c^2) \qquad (7)$$

2.1.2-TA'RIF: (7) tenglama ellipsning ***kanonik tenglamasi*** deyiladi.

Ellips kanonik tenglamasini tahlil etib, uning xususiyatlarini aniqlaymiz.

✓ Kanonik (7) tenglamada ellipsga tegishli har bir $M(x,y)$ nuqtaning koordinatalari kvadrati bilan qatnashmoqda. Shu sababli $M_1(-x,y)$, $M_2(-x, -y)$ va $M_3(x, -y)$ nuqtalarning koordinatalari ham (7) kanonik tenglamani qanoatlantiradi, ya'ni bu nuqtalar ham ellipsga tegishli bo'ladi. Bundan OX va OY koordinata o'qlari ellips uchun simmetriya o'qlari bo'lishi kelib chiqadi.

✓ (7) tenglamaga $x=0$ yoki $y=0$ qiymatlarni qo'yib va bunda hosil bo'ladigan tenglamalarni yechib, mos ravishda ellipsning OX yoki OY koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini topamiz:

$$x=0\Rightarrow\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow y^2=b^2\Rightarrow y=\pm b;\quad y=0\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}=1\Rightarrow x^2=a^2\Rightarrow x=\pm a.$$

Demak, ellips OX oʻqini $A_1(-a,0)$ va $A_2(a,0)$, OY oʻqini esa $B_1(0,-b)$ va $B_2(0,b)$ nuqtalarda kesib oʻtadi. Bu nuqtalar ellipsning ***uchlari*** deyiladi. Ellips uchlari orasidagi $A_1A_2=2a$ va $B_1B_2=2b$ kesmalar mos ravishda ellipsning ***katta oʻqi*** va ***kichik oʻqi***, $OA_1=OA_2=a$ va $OB_1=OB_2=b$ esa uning ***katta yarim oʻqi*** va ***kichik yarim oʻqi*** deyiladi.

(7) kanonik tenglamadan ellipsga tegishli ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtaning koordinatalari

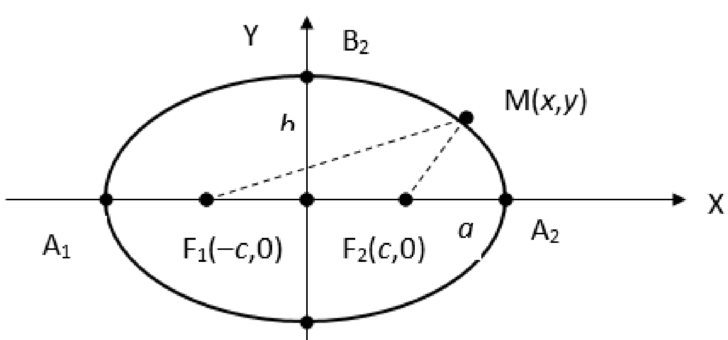
$$\frac{x^2}{a^2}=1-\frac{y^2}{b^2}\le 1\Rightarrow x^2\le a^2\Rightarrow |x|\le a,\qquad \frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}\le 1\Rightarrow y^2\le b^2\Rightarrow |y|\le b$$

tengsizliklarni qanoatlantirishini koʻramiz. Demak, ellips OX oʻqi boʻyicha $x=\pm a$ vertikal, OY oʻqi boʻyicha esa $y=\pm b$ gorizontal toʻgʻri chiziqlar orasida joylashgan chegaralangan egri chiziqdan iborat boʻladi.

✓ Koordinata oʻqlari ellips uchun simmetriya oʻqlari boʻlgani uchun uning grafigini faqat birinchi chorakda aniqlash kifoya. Bu yerda $x\ge 0$ va $y\ge 0$ boʻlgani uchun (7) tenglamadan unga teng kuchli boʻlgan

✓ $$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

tenglamaga kelamiz. Bunda $x\in[0;a]$ boʻlib, x oʻzgaruvchining qiymati 0 dan a ga qarab oshib borganda, y oʻzgaruvchining qiymati b dan boshlab nolgacha kamayib boradi. Bu maʼlumot asosida dastlab ellips grafigini I chorakdagi qismini chizamiz, soʻngra uni simmetriya asosida II, III va IV choraklarga davom ettirib, ellips grafigini quyidagi 2.1.1-rasmdagidek boʻlishini topamiz:



2.1.1

B₁

2.2. Ellipsning xarakteristikalari.

Endi ellipsning ayrim xususiyatlarini ifodalovchi tushunchalar bilan tanishamiz.

2.2.1-TA'RIF: Ellipsning fokuslari orasidagi $2c$ masofani uning katta o'qi uzunligi $2a$ ga nisbati ellipsning ***ekssentrisiteti*** deb ataladi.

Ellipsning ekssentrisiteti ε kabi belgilanadi va ta'rifga hamda (7) kanonik tenglamaga asosan

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \ . \qquad (8)$$

Bu formuladan $0 \le \varepsilon < 1$ ekanligi kelib chiqadi. Agar $\varepsilon = 0$ bo'lsa, (8) formuladan $a=b$ ekanligini ko'ramiz. Bu holda $a=b=R$ deb olsak, (7) kanonik tenglama $x^2+y^2=R^2$ ko'rinishga keladi, ya'ni aylana tenglamasini ifodalaydi. Demak aylana ekssentrisiteti $\varepsilon=0$ bo'lgan ellipsdan iborat, ya'ni ellipsning xususiy bir holi ekan. Shunday qilib ellipsning ekssentrisiteti ε qiymati bo'yicha uning shakli haqida xulosa chiqarish mumkin. Bunda ε qiymati qanchalik nolga yaqin bo'lsa, ellipsning shakli shunchalik "dumaloqroq" ; ε qanchalik birga yaqin bo'lsa, ellipsning shakli shunchalik "cho'zinchoqroq" bo'ladi.

2.2.2-TA'RIF: Ellipsning ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtasidan uning F_1 va F_2 fokuslarigacha bo'lgan $|MF_1|=r_1$ va $|MF_2|=r_2$ masofalar shu nuqtaning ***fokal radiuslari*** deyiladi.

Ellips ta'rifiga asosan $r_1+r_2 = 2a$ bo'ladi. Ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga asosan

$$r_1 = |MF_1| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = |MF_2| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \ .$$

Fokal radiuslarning bu ifodalarini kvadratga oshirib, so'ngra hosil bo'lgan ifodalarni hadma-had ayirib hamda $r_1+r_2 = 2a$ ekanligini eslab , r_1 va r_2 uchun ushbu tenglamalar sistemasiga kelamiz:

$$\begin{cases} r_1^2 - r_2^2 = 4cx \\ r_1 + r_2 = 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (r_1 + r_2)(r_1 - r_2) = 4cx \\ r_1 + r_2 = 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 - r_2 = \dfrac{2cx}{a} \\ r_1 + r_2 = 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 - r_2 = 2\varepsilon x \\ r_1 + r_2 = 2a \end{cases}$$

Bu tenglamalar sistemasini yechib, fokal radiuslar uchun quyidagi formulalarni olamiz:

$$r_1 = a + \varepsilon x \quad r_2 = a - \varepsilon x \qquad (9)$$

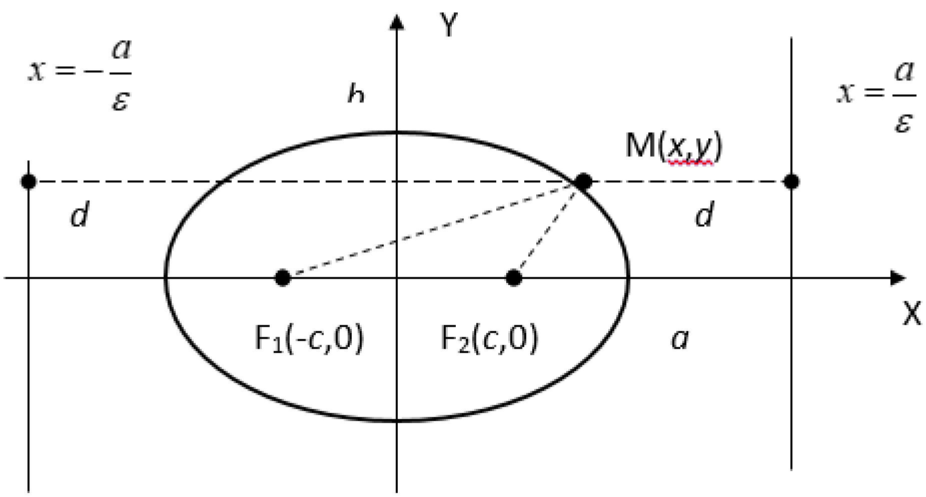
2.2.3-TA'RIF: Tenglamasi $x = \pm\, a/\varepsilon$ bo'lgan vertikal to'g'ri chiziqlar ellipsning ***direktrisalari*** deyiladi.

Ellipsning ixtiyoriy M(x,y) nuqtasidan uning x=–a/ε va x=a/ε direktrisalarigacha masofalarni mos ravishda d_1 va d_2 deb belgilaymiz. Quyidagi chizmadan ko‘rinadiki d_1=(a/ε)+x va d_2=(a/ε)–x. Bu tengliklar va (9) formulaga asosan quyidagi natijani olamiz:

$$\frac{r_1}{d_1}=\frac{a+\varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon}+x}=\varepsilon\frac{\frac{a}{\varepsilon}+x}{\frac{a}{\varepsilon}+x}=\varepsilon,\quad \frac{r_2}{d_2}=\frac{a-\varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon}-x}=\varepsilon\frac{\frac{a}{\varepsilon}-x}{\frac{a}{\varepsilon}-x}=\varepsilon\Rightarrow\ \frac{r_1}{d_1}=\frac{r_2}{d_2}=\varepsilon. \quad \textbf{(10)}$$

Shunday qilib ellipsning ixtiyoriy nuqtasidan uning OY o‘qiga nisbatan bir tomonda joylashgan fokusi va direktrisasigacha bo‘lgan masofalar nisbati o‘zgarmas son bo‘lib, doimo ε ekssentrisitetiga teng bo‘ladi.

Ellips va uning xarakteristikalari quyidagi 28-rasmda ko‘rsatilgan.



28-rasm

Misol: $x^2+4y^2=4$ tenglama ellipsni ifodalashini ko‘rsating va uning barcha xarakteristikalarini toping.

Yechish: Dastlab berilgan tenglamani ikkala tomonini 4 soniga bo‘lamiz:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1.$$

Bu yerdan berilgan tenglama yarim o‘qlari a=2 va b=1 bo‘lgan ellipsni ifodalashini ko‘ramiz. Unda $c^2=a^2-b^2$ =3 bo‘lgani uchun qaralayotgan ellipsning fokuslari $F_1(-\sqrt{3},0)$ va $F_2(\sqrt{3},0)$ nuqtalarda joylashganligini ko‘ramiz. Bu natijalardan foydalanib, ellipsning ekssentrisiteti va direktrisalarini topamiz:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad x = \pm\frac{a}{\varepsilon} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Ellipsga tegishli M(*x,y)* nuqtaning fokal radiuslari

$$r_1 = a + \varepsilon x = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x,\ r_2 = a + \varepsilon x = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

formulalar bilan topiladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO’YXATI:

1. Baxvalov . S. V., Modenov P. S., Parxomenko A. S. Analitik geometriyadan masalalar to‘plami. Toshkent, 2006, 546 bet.
2. Ильин В. А. Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия. М., Наука, 1981, с. 232.
3. Pogorelov A. V. Analitik geometriya. Toshkent, 0 ‘qituvchi, 1983, 206-bet.
4. Постников М. М. Аналитическая геометрия. М., Наука, 1979. с. 336.
5. Цубербиллер О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. Санкт-Петербург - Москва, Изд. Лан’, 2003 г. стр. 336.
6. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. М. Наука. 1998,
7. Кравченко К. Решения задач по аналитической геометрии, http:// www.a-geometrv.narod.ru

Elektron ta`lim resurslari

www. tdpu. Uz
www.lex. Uz
www. ziyonet. Uz
www. pedagog. uz
www. bilim. uz