KO‘P O‘ZGARUVCHILI FUNSIYA UCHUN SIL'VESTR ALOMATI VA UNING BA'ZI TADBIQLARI

Ravshanova Madina Ilhom qizi

Buxoro davlat universiteti,

Fizika-matematika fakul’teti magistri

Annotasiya. *Ushbu maqolada ko‘p o‘zgaruvchili funsiya uchun Sil'vestr alomati to‘liq keltirilgan va isboti sodda ravishda yoritilgan. Sil'vestr alomatining amaliy tadbiqlari sifatida bir nechta misollar yechib ko‘rsatilgan.*

Kalit so‘zlar: *Sil'vestr alomati, minimum, maksimum, uzluksizlik, xususiy hosila, Teylor formulasi, statsionar nuqta, kvadratik forma, koeffitsent, ekstremumning yetarli sharti.*

SYLVESTER'S SYMBOL FOR MULTIVARIABLE FUNCTIONS AND SOME APPLICATIONS

Ravshanova Madina Ilhom qizi

Bukhara state university,

Master of the Faculty of Physics and Mathematics

Annotation. *In this article, Sylvester's sign for a multivariable function is fully presented and its proof is simply covered. Several examples of practical applications of Sylvester's sign are presented.*

Key words: *Sylvester's sign, minimum, maximum, continuity, particular derivative, Taylor's formula, stationary point, quadratic form, coefficient, sufficient condition for extremum.*

$f(x)$ funksiya $x^0 \in R^m$ nuqtaning biror

$$U_\delta(x^0) = \{x\epsilon R^m : p(x, x^0) < \delta\} \quad (\delta > 0)$$

atrofida berilgan bo’lsin. Ushbu

$$\Delta = f(x) - f(\lambda^0) \tag{1}$$

ayirmani qaraylik.

Ravshanki, bu ayirma $U_\delta(x^0)$ atrofda o'z ishorasini saqlasa, ya'ni har doim $\Delta \geq 0$ $(\Delta \leq 0)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya x^0 nuqtada minimumga (maksimumga) erishadi. Agar (1) ayirma har qanday $U_\delta(x^0)$ atrofda ham o'z ishorasini saqlamasa, u holda $f(x)$ funksiya x^0 nuqtada ekstremumga ega bo'lmaydi. Demak, masala (1) ayirma o'z ishorasini saqlaydigan $U_\delta(x^0)$ atrof mavjudmi yoki yo'qmi, shuni aniqlashdan iborat. Bu masalani biz, xususiy holda yani $f(x)$ funksiya ma'lum shartlarni bajargan holda yechamiz.

$f(x)$ funksiya quyidagi shartlarni bajarsin:

1) $f(x)$ funksiya biror $U_\delta(x_0)$ da uzluksiz, barcha o'zgaruvchilari bo'yicha birinchi va ikkinchi tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga ega;

2) x^0 nuqta $f(x)$ funksiyaning statsionar nuqtasi, ya'ni

$$f_{x_1}{'}(x^0) = 0, f_{x_2}{'}(x^0) = 0, \dots \ , f_{x_m}{'}(x^0) = 0.$$

Ushbu bobda keltirilgan Teylor formulasidan foydalanib, x^0 nuqtaning statsionar nuqta ekanligini e'tiborga olib quyidagini topamiz:

$$f(x) = f(x^0) + \frac{1}{2}\Big[f''_{x_1^2}\Delta x_1^2 + f''_{x_2^2}\Delta x_2^2 + .. + f''_{x_m^2}\Delta x_m^2 +$$

$$+2\big(f''_{x_1x_2}\Delta x_1 \Delta x_2 + f''_{x_1x_3}\Delta x_1 \Delta x_3 + \cdots + f''_{x_{m-1}x_m}\Delta x_{m-1}\Delta x_m\big)\Big] =$$

$$= f(x^0) + \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{m} f''_{x_ix_k}\Delta x_i \Delta x_k.$$

Bu munosabatda $f(x)$ funksiyaning barcha xususiy hosilalari $f''_{x_ix_k}$ $(i, k = 1,2, \dots\dots, m)$ lar ushbu

$$(x_1^0 + \theta\Delta x_1, x_2^0 + \theta\Delta x_2, \dots\dots, x_m^0 + \theta\Delta x_m) \ \ (0 < 0 < 1)$$

nuqtada hisoblangan va

$$\Delta x_1 = x_1 - x_1^0, \ \ x_2 = x_2 - x_2^0, \ \ \dots., \ \ \Delta x_m = x_m - x_m^0.$$

Demak,

$$\Delta = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{m} f''_{x_i x_k}\Delta x_i \Delta x_k$$

berilgan $f(x)$ funksiya ikkinchi tartibli hosilalarining statsionar nuqtadagi qiymatlarini quyidagicha belgilaylik:

$$a_{ik} = f''_{x_i x_k}(x^0) \ \ (i, k = 1,2, \dots . m).$$

Unda $f''_{x_i x_k}$ (x) ning x^0 nuqtada uzluksizligidan

$$f''_{x_i x_k} = f''_{x_i x_k}(x_1^0 + \theta\Delta x_1, x_2^0 + \theta\Delta x_2, \dots ., x_m^0 + \theta\Delta x_m) = a_{ik} + a_{ik}$$

$$(i, k = 1,2, \dots \dots , m)$$

bo’lishi kelib chiqadi. Bu munosabatda $\Delta x_1 \to 0, \Delta x_2 \to 0, \dots \dots, \Delta x_m \to 0$ da barcha $a_{ik} \to 0$ va

$$a_{ik} = a_{ki} \qquad (i, k = 1,2, \dots . , m)$$

bo’ladi. Natijada (1) ayirma ushbu

$$\Delta = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\Delta x_i \Delta x_k + \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\Delta x_i \Delta x_k$$

ko’rinishini oladi. Buni quyidagicha ham yozish mumkin:

$$\Delta = \frac{p^2}{2}\left(\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\frac{\Delta x_i}{p}.\frac{\Delta x_k}{p} + \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\frac{\Delta x_i}{p}.\frac{\Delta x_k}{p}\right).$$

Agar $\xi_1 = \frac{\Delta x_i}{p}$ $(i = 1,2, \dots, m)$ deb belgilasak, unda

$$\Delta = \frac{p^2}{2}\left(\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\xi_i\xi_k + \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\xi_i\xi_k\right) \qquad (2)$$

bo’ladi.

Ushbu

$$P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = \sum_{i,k=1}^{m} b_{ik}\xi_i\xi_k$$

ifoda $\xi_1, \xi_2, \dots \dots, \xi_m$ o’zgaruvchilarning kvadratik formasi deb ataladi.

Bu yerda $b_{ik}(I,k=1,2,\dots..m)$ lar esa kvadratik formaning koeffitsentlari deyiladi. Malumki , har qanday kvadratik forma o'z koeffitsentlari orqali to'la aniqlanadi.

Teorema. *$f(x)$ funksiya x^0 nuqtaning biror $U_\delta(x^0)$ atrofida $(\delta>0)$ Berilgan bo'lsin va u ushbu shartlarni bajarsin: 1) $f(x)$ funksiya $U_\delta(x^0)$ da barcha o'zgaruvchilar $x_1,x_2,\dots.,x_m$ bo'yicha birinchi va ikkinchi tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga ega; 2) x^0 nuqta f(x) funksiyaning statsionar nuqtasi; 3) Koeffitsiyentlari $a_{ik}=f''_{x_ix_k}(x^0)$ $(i,k=1,2,\dots.m)$ bo'lgan*

$$Q(\xi_1,\xi_2,\dots\dots\dots\dots.\xi_m)=\sum_{i,k=1}^{m}a_{ik}\xi_i\xi_k$$

kvadratik forma musbat (manfiy) aniqlangan. U holda $f(x)$ funksiya x^0 nuqtada minumimga (maksimumga) erishadi.

Bu teorema funksiya ekstremumining yetarli shartini ifodalaydi.

$Q\ (\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m)$ kvadratik formaning musbat yoki manfiy aniqlanganlikka aloqador sharti teoremaning markaziy qismini tashkil etadi. Kvadratik forma uchun musbat yoki manfiy aniqlanganligini silvestr alomatidan foydalanib topish mumkin. Quyida biz Silvestr alomatini keltiramiz.

Teorema (Silvestr alomati) Ushbu

$$P(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m)=\sum_{i,k=1}^{m}b_{ik}\xi_i\xi_k$$

kvadratik formaning musbat aniqlangan bo'lishi uchun

$$b_{11}>0,\qquad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{21}\end{vmatrix}>0,\dots\dots,\ \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12}\dots. & b_{1m}\\ b_{21} & b_{22}\dots. & b_{2m}\\ \dots & & \\ b_{m1} & b_{m2}\dots & b_{mm}\end{vmatrix}>0$$

tengsizliklarning, manfiy aniqlangan bo'lishi uchun

$$b_{11}<0,\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}>0,\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{vmatrix}<0$$

$$,\dots,(-1)m\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12}\dots. & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22}\dots. & b_{2m} \\ \dots & & \\ b_{m1} & b_{m2}\dots & b_{mm} \end{vmatrix} > 0$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli [1-14].

Xususiy holni, funksiya ikki o'zgaruvchiga bog'liq bo'lgan holni qaraylik. $f(x_1,x_2)$ funksiya $x^0=(x_1^0,x_2^0)$ nuqtaning biror atrofi

$$U_\delta(x^0)=\{x=(x_1,x_2)\epsilon R^2:\ \rho(x,x^0)<\delta\} \qquad (\delta>0)$$

da berilgan bo'lsin va bu atrofda barcha birinchi, ikkinchi tartibli uzluksiz hosilalarga ega bo'lsin. x^0 esa qaralayotgan funksiyaning statsionar nuqtasi bo'lsin: $f'_{x_1}(x^0)=0,\ f''_{x_2}(x^0)=0.$

Odatdagidek

$$a_{11}=f''_{x_1^2}(x^0), \quad a_{12}=f''_{x_1x_2}(x^0), \qquad a_{22}=f''_{x_2^2}(x^0).$$

1^0. Agar

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0\ va\ a_{11}>0$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya x^0 nuqtada minimumga erishadi.

2^0. Agar

$$a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0\ \ va\ \ a_{11}<0$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya x^0 nuqtada maksimumga erishadi.

3^0. Agar

$$a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya x^0 nuqtada ekstremumga erishmaydi.

4^0. Agar

$$a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya x^0 nuqtada ekstremumga erishishi ham mumkin, erishmasligi ham mumkin. Bu "shubhali" hol qo'shimcha tekshirish yordamida aniqlanadi [14-18].

Haqiqatan ham, $1^0 -$ va $2^0 -$ hollarda kvadratik forma mos ravishda musbat aniqlangan yoki manfiy aniqlangan bo'ladi (qaralsin: Silvestr alomati).

$3^0 -$ holda, ya'ni

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0 \tag{3}$$

bo'lganda $Q(\xi_1, \xi_2) = a_{11}\xi_1^2 + 2a_{12}\xi_1\xi_2 + a_{22}\xi_2^2$ kvadratik forma noaniq bo'ladi. Shuni isbotlaymiz.

$a_{11} = 0$ bo'lsin.

Bu holda (3) dan $a_{12} \neq 0$ bo'lishi kelib chiqadi. Natijada $Q(\xi_1, \xi_2)$ kvadratik forma ushbu

$$Q(\xi_1, \xi_2) = (2a_{12}\xi_1 + a_{22}\xi_2)\xi_2$$

ko'rinishga keladi [19-22]. Bu kvadratik forma

$$\xi_1 = \frac{1 - a_{22}}{2a_{12}}, \quad \xi_2 = 1$$

qiymatda musbat:

$$Q\left(\frac{1 - a_{22}}{2a_{12}}, \ 1\right) = 1 > 0 \ \ va \ \xi_1 = \frac{1 + a_{22}}{2a_{12}}, \qquad \xi_2 = -1$$

qiymatda esa manfiy:

$$Q\left(\frac{1 + a_{22}}{2a_{12}}, -1\right) = -1 < 0$$

bo'ladi.

Endi $a_{11} > 0$ bo'lsin. Bu holda $Q(\xi_1, \xi_2)$ kvadratik formani quyidagicha yozib olamiz:

$$Q(\xi_1, \xi_2) = a_{11}\left[(\xi_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}\xi_2)^2 + \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}^2}\xi_2^2\right]. \tag{4}$$

Keyingi tenglikdan $\xi_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}, \ \xi_2 = 1$ qiymatda

$$Q\left(-\frac{a_{12}}{a_{11}}, 1\right) < 0$$

va

$\vee\ \xi_1 > -\frac{a_{12}}{a_{11}} + \sqrt{\frac{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}{a_{11}^2}},\ \ \xi_2 = 1$

qiymatlarda esa

$$Q(\xi_1, 1) > 0$$

bo'lishini topamiz.

Shunday qilib $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ bo'lganda $Q(\xi_1, \xi_2)$ kvadratik formaning noaniq bo'lishi isbot etildi.

1-misol. Ushbu

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 3ax_1x_2 \qquad (a \neq 0)$$

funksiyani qaraylik. Bu funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalari

$$f_{x_1}(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 3a_{x2},\ \ f_{x_2}(x_1, x_2) = 3x_2^2 - 3a_{x1},$$

$$f_{x_1^{2(x_1,x_2)=6x_1}}, f_{x_1x_2}(x_1, x_2) = -3a,\ \ f_{x_2^2}(x_1, x_2) = 6x_2$$

bo'ladi.

$$\begin{cases} \{3x_1^2 - 3ax_2 = 0, \\ \{3x_2^2 - 3ax_1 = 0 \end{cases}$$

sistemani yechib, berilgan funksiyaning statsionar nuqtalari (0,0) va (a, a) ekanini topamiz. (a, a) nuqtada

$$a_{11} = 6a, \qquad a_{12} = -3a, \qquad a_{22} = 6a$$

bo'lib,

$$a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2 = 27a^2 > 0$$

bo'ladi.

Demak, $a > 0$ bo'lganda ($a_{11} > 0$ bo'lib) funksiya (a, a) nuqta minimumga erishadi, $(a < 0)$ bo'lganda funksiya (a, a) nuqtada maksimumga erishadi. Ravshanki, $f(a, a) = -a^3$. (0,0) nuqtada

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -9a^2 < 0$$

bo'ladi. Demak, berilgan funksiya (0,0) nuqtada ekstremumga erishmaydi.

2-misol. Quyidagi

$$f(x_1, x_2) = (x_2 - x_1)^2 + (x_2 + 2)^3$$

funksiyani qaraylik. Berilgan funksiyaning statsionar nuqtasi (-2,-2) nuqta bo'ladi. Bu nuqtada

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

bo'lishini topish qiyin emas. Ekstremum bor yo'qligni aniqlash uchun qo'shimcha tekshirish o'tkazishimiz kerak. $(-2, -2)$ nuqtadan o'tuvchi $x_2 = x_1$ to'gri chiziqning nuqtalarini qaraymiz. Ravshanki, bu to'gri chiziq nuqtalarida berilgan funksiya

$$f(x_1, x_2) = (x_2 - 2)$$

bo'lib, $x_2 < -2$ da $f(x_1, x_2) < 0, x_2 > -2\, da\, f(x_1, x_2) > 0$ bo'ladi. Demak, $f(x_1, x_2)$ funksiya $(-2, -2)$ atorida ishora saqlamaydi. Binobarin, berilgan funksiya (-2,-2) nuqtada ekstremumga erishmaydi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR (REFERENCES)

1. Расулов Х.Р. Об одной квадратичной динамической системе с непрерывным временем // Тезисы международной научно-практической конференции «Актуальные задачи математического моделирования и информационных технологий» Nukus, May 2-3, 2023, Стр.286-287.

2. Расулов Х.Р. Аналог задачи Трикоми для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2022. Т. 26, № 4.

3. Rasulov X.R. Qualitative analysis of strictly non-Volterra quadratic dynamical systems with continuous time // Communications in Mathematics, 30 (2022), no. 1, pp. 239-250.

4. Xaydar Raupovich Rasulov. Boundary value problem in a domain with deviation from the characteristics for one nonlinear equation with mixed type. AIP Conf. Proc. 2781, 020016 (2023)

5. Расулов Х.Р. О некоторых символах математического анализа // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.66-77.
6. Расулов Х.Р. О понятие асимптотического разложения и ее некоторые применения // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), pp.77-88.
7. Xaydar R. Rasulov. On the solvability of a boundary value problem for a quasilinear equation of mixed type with two degeneration lines // Journal of Physics: Conference Series 2070 012002 (2021), pp.1–11.
8. Rasulov Kh.R. (2018). On a continuous time F - quadratic dynamical system // Uzbek Mathematical Journal, №4, pp.126-131.
9. Исломов Б., Расулов Х.Р. (1997). Существование обобщенных решений краевой задачи для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №7, с.5-9.
10. Rasulov, R. X. R. (2022). Квази чизиқли гиперболик турдаги тенглама учун Коши масаласи. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
11. Rasulov, X. (2021). Краевая задача для одного нелинейного уравнения смешанного типа. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).
12. Rasulov, R. X. R. (2021). Гиперболик типдаги тенглама учун Коши масаласи. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).
13. Rasulov, R. X. R. (2022). О краевых задачах для уравнений эллиптического типа с линией искажения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).
14. Rasulov, R. X. R. (2022). Иккита бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги квазичизиқли тенглама учун Нейман масаласига ўхшаш чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
15. Rasulov, H. (2021). Funksional tenglamalarni yechish bo‘yicha ba’zi uslubiy ko‘rsatmalar. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).
16. Rasulov, H. (2021). «Kompleks analiz» fanida mustaqil ta’limni tashkil qilish. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).

17. Rasulov, H. (2021). Boundary value problem for a quasilinear elliptic equation with two perpendicular line of degeneration. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).

18. Rasulov, H. (2021). Баъзи динамик системаларнинг сонли ечимлари ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 2(2).

19. Rasulov, H. (2021). Funksiyaning to‘la o‘zgarishini hisoblashdagi asosiy qoidalar. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 6(6).

20. Rasulov, H. (2021). One dynamic system with continuous time. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).

21. Rasulov, X. (2022). Об одной динамическойсистеме с непрерывным временем. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 22(22).

22. Rasulov, R. X. R. (2022). Buzilish chizig’iga ega kvazichiziqli elliptik tenglama uchun Dirixle-Neyman masalasi. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).