Algebraik va transendent tenglamalar, ularni yechishning geometrik talqini

Andijon davlat universiteti talabasi

Muhammademinov Alijon Azizjon o'g'li

Annotatsiya: *Har xil obyektlarni modellar yordamida tadqiq qilishning ko'pgina masalalari chiziqli bo'lmagan tenglamalarni yechishga olib kelinadi. Xususan, elektron, radioelektron va hisoblash texnikasi qurilmalarini tadqiq qilishda, tebranishlar nazariyasi, suyuqlik va gaz mexanikasi, kimyo-texnologiya va boshqa sohalar masalalarini modellar yordamida yechishda ana shunday amliy masala yuzaga keladi. Quyida chiziqli bo'lmagan tenglamalarni yechish usullari bilan tanishamiz.*

Kalit so'zlar: *algebraik tenglama, iteratsion jarayon, transindent tenglama, geometrik talqin, iteratsion usul.*

Ushbu

$$f(x) = 0 \qquad (1.1)$$

chiziqli bo'lmagan tenglamaning ildizini (ildizlarini) topish talab etiladi.

Agar f(x) funksiya ko'phad bo'lsa, u holda (1.1) tenglama n–darajali algebraik tenglama deb ataladi, ya'ni

$$f(x) = P_n(x) = a_0x_n + a_1x_{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \qquad (1.2)$$

bunda a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n – berilgan $P_n(x)$ko'phadning koeffisiyentlari.

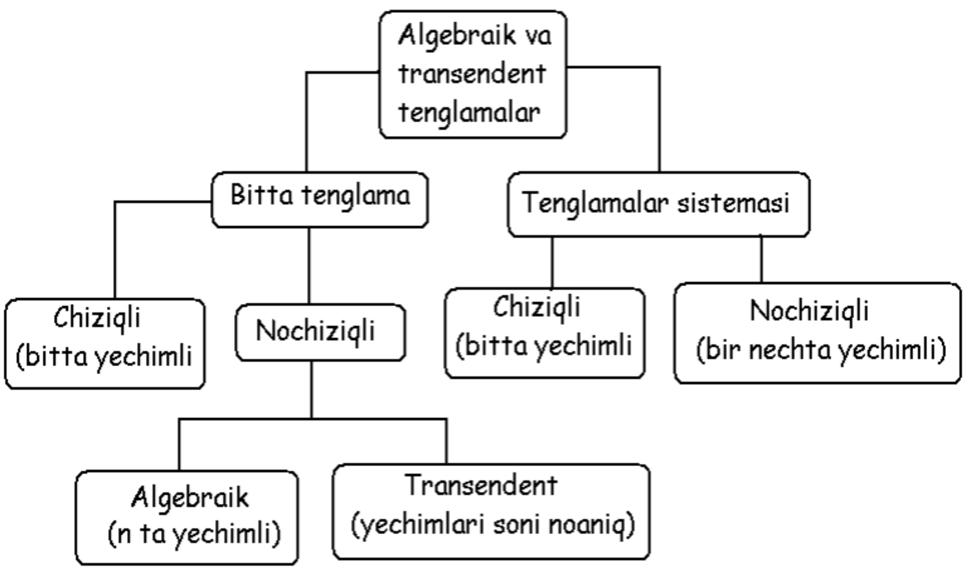
Boshqacha aytganda, algebraik tenglama deb algebraik (butun, ratsional, irratsional) funksiyalardan tashkil topgan tenglamaga aytiladi.

Darajasi to'rtdan yuqori bo'lgan algebraik tenglamalar uchun uning ildizlarini koeffisiyentlari orqali ifodalovchi aniq formula mavjud emas. Algebraik tenglama ildizlari sonini ko‘phadning darajasiga qarab, ularning xarakterini esa shu ko‘phad koeffisiyentlarining ishorasiga qarab aniqlash mumkin. Quyiroqda n–darajali algebraik tenglama, ya’ni $P_n(x)$ko‘phadning ildizlari haqida kengroq tushunchalar berilgan.

Algebraik bo‘lmagan har qanday tenglama transendent tenglama (transendent funksiyalar: ko‘rsatgichli, logarifmik, trigonometrik, teskari trigonometrik va boshqa funksiyalarni o‘z ichiga olgan tenglama) deb ataladi.

Kamdan kam hollardagina transendent tenglamalar ildizlarining aniq qiymatini topish mumkin. Transendent tenglamalar birorta ham haqiqiy ildizga ega bo‘lmasligi, chekli yoki cheksiz sondagi ildizlarga ega bo‘lishi mumkin.

Shularga ko‘ra tenglamaning taqribiy ildizlarini topish usullari va ularning aniqlik darajasi muhim ahamiyatga ega. Shunday qilib, algebraik va transendent tenglamalar ikki turga bo‘linadi: chiziqli (bitta yechimli) va chiziqli bo‘lmagan (bir yoki bir nechta yechimli) tenglamalar. Chiziqli bo‘lmagan tenglamalar esa: algebraik (yechimlari n ta) va transendent (yechimlari soni noma’lum) tenglamalarga bo‘linadi. (1.1-rasm)



1.1-rasm. Tenglamalar klassifikatsiyasi

Masalani yechish bosqichlari: Chiziqli bo‘lmagan tenglamalarni yechish usullari ikki turga bo‘linadi: to‘g‘ri (yoki analitik) va taqribiy (iteratsion) usullar. Analitik usulda tenglamaning barcha yechimlari chekli sondagi operatsiyalarda (yoki formulalar) orqali aniqlanadi. Masalan, shu usulga ushbu $ax^2 + bx + c = 0$ – kvadrat tenglamaning yechimlarini topishni misol qilib keltirish mumkin. Bu tenglamaning yechimlari quyidagicha:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

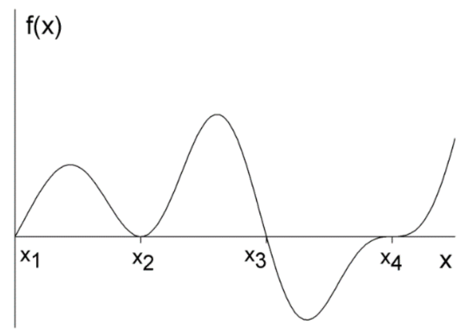
Chiziqli bo‘lmagan tenglamalarni yechish bir necha bosqichga bo‘linadi: ildizlarning mavjudligini, sonini, xarakterini va ularning joylashishini tekshirish; ildizlarni ajratish; ildizlarning taqribiy qiymatlarini topish, ya’ni tenglamaning yagona ildizi mavjud bo‘lgan yetarlicha kichik [a,b] kesmani aniqlash (dastlabki yaqinlashuvchi ildiz); ildizlarning barchasini yoki ularning bir qismini talab qilingan aniqlikda topish.

Dastlabki uchta bosqichda analitik yoki grafik usuldan (ba’zida tadqiqot obyekti yoki hodisaning fizik ma’nosidan) foydalanish mumkin. Bunda quyidagi holatlar kuzatiladi: ildiz yagona; cheksiz ko‘p yechimlar; ildiz yo‘q; bir nechta yechimlar mavjud bo‘lib, ulardan ba’zilari haqiqiy, ba’zilari esa mavhum; ildizlar karrali; ildizlar bir biriga juda yaqin va dastlabki yaqinlashishni topish murakkab.

Oxirgi bosqichda esa biror taqribiy (iteratsion) usuldan foydalaniladi, bunda dastlabki tenglamaning ildizini topish juda murakkab bo‘lgan holda bu tenglama uning ildiziga teng yoki unga juda ham yaqin joylashgan ildizli sodda tenglamaga ham almashtirilishi (masalan, transendent tenglamani algebraik tenglamaga almashtirish) mumkin

Tenglamani yechishning geometrik talqini. Tenglamaning ildizlari har xil bo‘lishi mumkin. Geometrik nuqtai nazardan bu $\overline{x}$ ildiz y =f(x) funksiya grafigining

Ox absissa o‘qi bilan kesishish nuqtasini bildiradi. Agar birinchi tartibli hosila $f'(\overline{x}) \neq 0$ bo‘lsa, u holda $\overline{x}$– oddiy ildiz, aks holda esa u karrali ildiz deb ataladi.



Agar barcha k<m va $f^{(m)}(\overline{x}) \neq 0$ uchun $f^{(k)}(\overline{x}) = 0$ bo‘lsa, u holda m-butun son $\overline{x}$ ildizning karrasi deb ataladi. Ushbu rasmda x_1 va x_3 – oddiy, x_2 –eng kamida ikki karrali, x_4 –eng kamida uch karrali ildiz.

Boshqacha qilib aytganda, agar $f(x)$ funksiyani $\overline{x}$ildizi atrofida $f(x) = (x - \overline{x})^p$g(x) ko‘rinishda ifodalash mumkin bo‘lsa, u holda g(x)- chegaralangan funksiya (g$'(\overline{x}) \neq 0$) uchun p-natural son ildizning karrasi deb ataladi. Toq p larda $f(x)$ funksiya [a,b] ishorasini almashtiradi, ya’ni $f(a)\, f(b)$ <0, juft p larda esa yo‘q.

Tenglamani yechishning taqribiy (iteratsion) usullari va iteratsion jarayon tushunchalari. Tenglamani yechish uchun qo‘llaniladigan t*aqribiy* (*iteratsion*) usullar quyidagilar: kesmani ikkiga bo‘lish usuli (dixotomiya usuli); proporsional bo‘laklar usuli (vatarlar usuli); urinmalar usuli (Nyuton usuli); oddiy iteratsiya usuli; kesuvchi chiziqlar usuli; kombinatsiyali usul (bir necha usulning uyg‘un birikmasidan tuzilgan usul); kesimlar usuli (chiziqli interpolyatsiya qoidasi); Steffensen usuli (EytkenSteffensen usuli) va hokazo.

Dastlabki $f(x)$=0 tenglamani $\varphi(x) = x + g(x)f(x)$ almashtirish orqaali unga ekvivalent bo‘lgan ushbu $x = \varphi(x)$ tenglamaga keltiramiz, bunda $g(x)$- ishorasini o‘zgartirmaydigan ixtiyoriy uzluksiz funksiya.

Iteratsion usullarda yechimning dasatlabki x_0 – ixtiyoriy yaqinlashishi olinadi va u ketma-ket aniqlashtirib boriladi. Natijada yechimning x_0, x_1, ...,x_n, … ketma-ketligi hosil qilinadi. Tenglamani yechishning iteratsion usuliga ko‘ra uning ildiziga yaqinlashuvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlik $\lim_{n\to\infty}|x_n-\overline{x}|=0$ tenglikning bajarilishidan chiqadi.

Agar bunda x_{n+1} ni hisoblash uchun undan oldin hisoblangan bitta x_n yaqinlashishdan foydalanilsa, ya'ni $x_{n+1}=\varphi_n(x_n)$, u holda bu usul *bir nuqtali* (*bir qadamli*) yoki *oddiy iteratsiya* usuli, aks holda esa, ya'ni oldin hisoblangan bir nechta yaqinlashishdan

$$x_{n+1}=\varphi_n(x_n,x_{n-1},x_{n-2},\dots)$$

kabi foydalanilsa, u holda bu usul *ko'p nuqtali* (*ko'p qadamli*) *iteratsiya usuli* deb ataladi. Agar bunda φ_n funksiya n ga bog'liq bo'lmasa, jarayon *statsionar*, aks holda *nostatsionar* deb ataladi. Maslan oddiy iteratsiya usuli statsionar va bir qadamli usul bo'lib, birinchi tartibli itaratsion jarayonni ifodalaydi.

Agarda bunda $\{x_n\}$ ketma-ketlik $n\to\infty$ bo'lganda aniq yechimga bir tomonlama (chapdan yoki o'ngdan yaqinlashsa – bir tomonlama usul) yoki ikki tomonlama (har ikkala tarafidan yaqinlashsa – ikki tomonlama usul) intilsa, *iterasiya jarayoni yaqinlashadi* deyiladi.

Faraz qilaylik, ε- ildizni topish talab qilinayotgan *absolut aniqlik* bo'lsin. *Hisoblash jarayonini yakunlash kriteriyasi*: hisoblash jarayonini ikki tomonlama yaqinlashishida $|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$ shart yoki bir tomonlama yaqinlashishida $|f(x_{n+1})|<\varepsilon$ va $|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$ shartlar bajarilguniga qadar davom ettiriladi. Shuni ta'kidlaymanki bir tomonlama usullar qo'llanilayotganida ko'proq nisbiy aniqlikdan foydalaniladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Shavkat Mirziyoyev "Inson Manfaatlari va Mustaqillik - Kelajakni Boshqarishning Asosiy Yo'nalishlari" 2018-yil 236 b.

2. Isroilov M. "Hisoblash metodlari", T., "O`zbekiston", 2003

3. Shoxamidov Sh.Sh. “Amaliy matematika unsurlari”, T., “O`zbekiston”, 1997

4. Boyzoqov A., Qayumov Sh. “Hisoblash matematikasi asoslari”, O`quv qo`llanma. Toshkent 2000.

5. Abduqodirov A.A. “Hisoblash matematikasi va programmalash”, Toshkent. “O`qituvchi” 1989.

6. Vorob`eva G.N. i dr. “Praktikum po vichislitel’noy matematike” M. VSh. 1990.

7. Abduhamidov A., Xudoynazarov S. “Hisoblash usullaridan mashqlar va laboratoriya ishlari”, T.1995.

8. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad, Mathlab, Maple (Самоучитель). – М.: НТ Пресс, 2006. – 496 с.

9. Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченова Н. В. Вычислительные методы. - М.: Издательский дом МЭИ, 2008. - 672 с.