СМЕШАННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СОСТАВНОГО ТИПА

Бекмуратов улугбек Нурали угли

Ташкентский государственный технический университет им. Ислама Каримова, филиал в г. Алмалык

Аннотация

В данной статье приводится постановка некоторых смешанных задач, для уравнения составного типа третьогопорядка. При определенных условиях на коэффисенты и правую часть уравнения доказывается корректность этих задач в пространствах С.Л.Соболева.

Ключвые слова.

Смешанные краевые задачи, уравнения составного типа, теорема, цилиндрической области, регулярным задачи, дифференциальное уравнение, пространства С.Л. Соболева, формулу Грина.

Постановка задачи.

Пуст Ω - органиченная односвязанная область в n-мерном евклидоовом пространстве R^n. Предположим для простоты что (n-1)-мерная граница $\partial\Omega$ области Ω принадлежит классу C^∞, т.е. в достаточно малой окрестности каждой точки

$x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots x_{n)}^0 \in \partial\Omega$ существует параметрическое представление поверхности

$$\partial\Omega : x_j = f(x_1, x_2, \dots., x_{j-1}, x_{j+1,} \dots x_n)$$

$$1 \le j \ge n$$

Такие что функция f бесконечно дифференцируема в этой окрестности.

Положим

$$D = (0,1) \times \Omega, S = \partial\Omega \times [0,1]$$

В цилиндрической области $D \subset R^{n-1}$ рассмотрим дифференциальное уравнение третьего порядка

$$Lu \equiv -\frac{\partial \Delta u}{\partial t} + k(x,t)U_{tt} + \sum_{\alpha=1}^{n} U_{x\alpha x\alpha} + \alpha(x,t)U_t + \beta(x,t)U + \alpha(t)|U_t|^p U_t = f(x,t) \qquad (1)$$

где,

$$\Delta U = U_{tt} + \sum_{\alpha=1}^{n} U_{x\alpha x\alpha}$$

Отметим, что уравнения вида (1) относятся к классу уравнений составного типа [1], [6]. Исследование краевых задач для уравнений составного типа представляет большой интерес , особенное в многомерном случае [2].

Всюду ниже будем предполагать, что

$$K(x,t)\epsilon C(\overline{D}) \cap C^1(\overline{D}), \alpha(x,t)\epsilon C(\overline{D}),$$

$$\beta(x,t)\epsilon C(\overline{D}) \cap C^1(\overline{D}), 0 \leq l(t)\epsilon C^1[0,1]$$

$$\text{-}1{-}1 \leq \rho < \frac{2}{n-1} \text{ при } n \geq 3$$

($p > -1$,произвольно при n=1,2).

Обозначим через $V = (V_x, V_{x1}V_{x2}, \dots V_{xn})$ вектор внутренней нормали к S.

Смешанная задача. Найти решение уравнения (1) в области D и такое, что

$$\left.\begin{aligned} U(x,t)\Big|_{t=1} = 0, U_t\Big|_{t=1} = 0 \\ U_{tt}\Big|_{t=0} = 0, U(x,t)\Big|_{s} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Обозначим через C_4 класс функций из пространства

$$H = \left\{U: U\epsilon W_2^2(D); \frac{\partial \Delta u}{\partial t} \epsilon L_2(D), U_t \epsilon L_p^1(D)\right\}$$

удовлетворяющих условиям (2). В пространстве L_p^1 , p=s+2 норма определяется следующим образом

$$||U||_{L_p^1(D)}^p = \int_D j(t)\left|U\right|^p dxdt$$

Определение. Назовём функцию $u(x,t)$ регулярным решением задачи (1)-(2), если $u(x,t)\epsilon\, C_L$,

$\left| U_t \right|^p U_t \in L_2(D)$; $\frac{\partial}{\partial t}(|U_t|^{3|2}U_t) \in L_2^1(D), \frac{\partial}{\partial xi}(|U_t|^{p|2}U_t)\epsilon L_2^{\gamma}(D)$

и $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) почти всюда в области D .

Априорные оценки. Разрешимость смешанной задачи для уравнений составного типа.

Теорема. Пусть виполнены вышеуказанные условия для коеффицентов уравнения (1), пусть, кроме того всюду, в области D виполнены условия

$$2\alpha(x,t) - \lambda K - K_t - \lambda^2 \geq \delta, \quad -\lambda\beta - \beta_1 \geq \delta, \quad \delta > 0$$

$$K(x,0) + \lambda \leq 0, \qquad \beta(x,0) \leq 0$$

тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что $f\epsilon L_2(D)$ существует единственное регулярное решение задачи (1)- (2). Докажем справедливость следующих оценок:

$$\|U_{tt}\|^2_{L_{2(D)}} + \|\nabla U_t\|_0^2 + \|U\|^2_{W_2^1(D)} + \|U_t\|^p_{L_p(D)} \leq m\|f\|_0^2 \qquad (3)$$

$$\left\|\frac{\partial \Delta u}{\partial t}\right\|_0^2 + \sum_{\gamma=1}^{m}\left\|U_{x\gamma=\gamma}\right\|_0^2 + \frac{\rho+1}{(0{,}5\rho+1)}\left[\left\|\frac{\partial}{\partial t}(|U_t|^{\frac{\rho}{2}}U_t)\right\|^2_{L^{\gamma}_{p(D)}} + \sum_{N=1}^{n}\left\|\frac{\partial}{\partial xi}(|U_t|^{\frac{\rho}{2}}U_t)\right\|^2_{L^{\gamma}_{p(D)}}\right] \leq m_2\|f\|_0^2 \qquad (4)$$

Для етого воспользуюмся методом Галёркина (см. [3], [4]) с выбором специального базица.

Пусть $\vartheta_n(x,t)$собственные функции краевой задачи

$$\Delta\vartheta_n(x,t) = -\mu_n^2\vartheta_n(x,t) \qquad (5)$$

$$\left.\begin{array}{c}\vartheta_n(x,t)|_{t=1} = 0, \quad \vartheta_{nt} - \lambda\vartheta_{nt}|_{t=0} = 0 \\ \vartheta_n(x,t)|_{s=1} = 0\end{array}\right\} \qquad (6)$$

$$U^N(x,t) = \sum_{n=1}^{N} C_n W_n(x,t)$$

где C_n определаются из системы нелинейных алгебраических уравнений вида

$$(LU^N, \vartheta_s)_0 = (f, \vartheta_s)_0, \quad S = 1,2 \dots N \qquad (7)$$

Разрешимость этой системы следует из полученных ниже априорных оценок приближенных решений и леммы «об остром угле» [5]. Умножая (7) на $2C_s$ и суммируя по S от 1 до N получим тождество

$$(L_U^N, l^{\lambda i}\, U_l^N)_0 = (f, l^{\lambda i} U_l\,)_0 \qquad (8)$$

Применяя к (8) формулу Грина и неравенство Коши

$$2|a| \cdot |b| \le \gamma |a|^2 + \frac{1}{\gamma}|b|^2, \forall \gamma > 0$$

получим

$$\left\|U_{\gamma l}\right\|_0^2 + \|\nabla U_l\|_0^1 + \left\|U_l^N\right\|_{l_p(D)}^p + \|U\|_{W_3^1(D)}^2 \le m_3 \|f\|_0^2$$

Вернемся к вопросу о разрешимости ситемы уравнений (8).

Если записать ее в виде $P_N(\vec{c}) = 0$, где

$$\vec{c} = \exp\,(\lambda t\,)(C_1, C_2, \dots C_n),$$

То справедлива оценка

$$(P_n(\vec{c}), \vec{c})_{R^N} \ge m_0 \|U^N\|_{W_2^1(D)} - m_4$$

где m_0 и m_4 некоторые положителые постоянные. В силу того, что линейно облочка $\Phi(W_1, W_2, \dots W_N)$ есть конечномерное пространство то существует $R_1(N) > 0$ такое, что

$$\|U^N\|_{W_2^1(D)} \ge R_1(N) \sum_{k=1}^{N} (C_k)^2$$

Значит выполнено неравенство

$$(P_n(\vec{c}), \vec{c})_{R^N} \ge R_1(N)|\vec{c}|^2 - m_4 \ge 0,$$

Если $|\vec{c}|$ достаточная большая величина, а это есть условие «острого угла» достаточное для разрешимости системы уравнений (8). Для того, чтобы последовательность решений $\{U^N\}$, была ограничена в (HD), необходима оценит производную $\frac{\partial\Delta 4}{\partial t}$ и U_{xixi}. С этой целю блогадоря (5)-(7) мы можем заменить ϑ_N в (8) на $-\frac{1}{\mu}\Delta\vartheta_N$. Умножая (8) на C_n и суммируя по n от 1 до N находим

$$\left(Lu^N, -\frac{2}{\mu n^2}e^{\lambda t}\left[\frac{\partial\Delta u^N}{\partial x} + 2\lambda U_{tt}^N + \lambda^2 U_t^N\right]\right)_0$$

$$= -\frac{2}{\mu_n^2}\left(f, e^{\lambda t}\left[\frac{\partial\Delta u^N}{\partial x} + 2\lambda U_{tt}^N + \lambda^2 U_t^N\right]\right)_0 \quad (9)$$

Применяя формулу Грина, получим

$$\int_D e^{\lambda t}\left\{\left(\frac{\partial\Delta u^N}{\partial x}\right)^2 + \frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 U^N}{\partial xi^2}\right)^2 - \sum_{i=1}^{N} U_{xixi}^N U_{tt}^N + \frac{\partial\Delta U^N}{\partial t} + \left[\left(2\lambda - k(x,t)\right)U_{tt}^N + \left(\lambda^2 + k(x,t)\right)U_t^N + \beta(x,t)U^N\right] - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 U^N}{\partial xi^2}\left[\lambda U_{tt}^N + \lambda^2 U_t^N\right] + \left[2\lambda U_{tt}^N + \lambda^2 U_t^N\right] - k(x,t)U_{tt}^N - k(x,t)U_t^N - \beta(x,t)U^N\right\}dxdt +$$

$$\frac{1}{2}\int_S e^{\lambda t}\left[U_{xx}^{N^2}V_1 + \gamma(t)|U_t^N|^{s+1}U_{tt}^N V_1 + \gamma(t)|U_t|^{p+2}U_{xi}V_{xi}\right]dS +$$

$$\int_D e^{\lambda t}\left[l(t)e^{\lambda t}\right]|U_t^N|^{s+1}U_{tt}^N dxdt + 2\int_D e^{\lambda t}\left[l(t) - |U_t^N|^{p+1}U_{tt}^N\right]dD -$$

$$\lambda^2\int_D e^{\lambda t}|U_t^N|^{s+2}dD + \int_D e^{\lambda t}\gamma(t)(S+1)\left[|U_t^N|^s U_{tt}^{N^2} + |U_t^N|^s U_{xt}^{N^2}\right]dxdt =$$

$$\sum_{i=1}^{6} I_e \quad (10)$$

(I_1- интеграл по области, I_2- интеграл по границе, I_3, I_4, I_5, I_6- интегралы по области с нелинейнымичленами).

Из оценки (3), применяя неравенство Коши в I_1 получим, что

интеграл I_1допускает оценку

$$I_1 \geq m_6 \int\limits_D \left[\left(\frac{\partial \Delta u^N}{\partial t} \right)^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 U^N}{\partial xi^2} \right)^2 \right] dD \qquad (11)$$

Учитывая условие (2) получим

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{\partial^2 u^N(x,0)}{\partial xi^2} \right] dx \geq 0$$

Члены из (10) не являющимися билинейными, можно переписать в виде

$$I_6 = \frac{2(\rho+1)}{(0{,}5\rho+1)} \int\limits_D e^{\lambda t} \gamma(t) \left[\left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(|U_t^N|^{p/2} U_t^N \right) \right\}^2 + \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(|U_t^N|^{p/2} U_t^N \right) \right\}^2 \right] dxdt \qquad (12)$$

Из представления (14) видно, что $I_6 > 0$. Нам осталось оценить интегралы $I_3 + I_4$, т.е.

$$I_3 + I_4 = \int\limits_D e^{\lambda t} \left[f(t) e^{\lambda t} \right] |U_t^N|^{s+1} U_{tt}^N dxdt - 2 \int\limits_D e^{-\lambda t} \left[\gamma(t) e^{\lambda t} \right] |U_t^N|^{s+1} U_{tt}^N dxdt$$

$$= \int\limits_D e^{-\lambda t} (jt - \lambda j) |U_t^N| U_{tt}^N dxdt$$

В силу неравенства Гёльдера, имеем

$$I_3 + I_4 \geq -max|\gamma t - \lambda t| \| |U_t^N|^p \|_{L_p(D)} \cdot \|U_t^N\|_{L_p(D)} |U_{tt}^N|_0$$

Где q (как и в теореме вложения Соболева) определяется из равенства

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{q} + \frac{1}{2} = 1$$

Поскольку, согласно $S \leq \frac{2}{n-2}$, следует $S^n \leq q$ то в силу (3) имеем

$$\| |U_t^N|^p \|_{L_n} \leq \| |U_t^N|^p \|_{L_p} \leq const(\|f\|_0)$$

Итак,

$$I_3 + I_4 \geq \; -const(\|f\|_0) max|\gamma t - \lambda t| \|U_t^N\|_{L_q} \|U_t^N\|_Q \qquad (13)$$

При выполнении условий теоремы на параметр S (13) имеем вложение

$$W_2^1(D) C L_q(D) \;\; \text{(см.8)}$$

Положим

$$\mathrm{const}(\|f\|_0)\max|\gamma t-\lambda t|<\delta 3$$

И применяя неравенства Коши к (13) получим

$$I_3+I_4\geq-\frac{\delta 3}{2}|U_{tt}^N|_0^2-\frac{\delta 3}{2}|U_t^N|_{W_2^1(D)}^2 \tag{14}$$

Следовательно из (10) вытекает второя оценка. Итак мы получили необходимые априорные оценки (3)-(4) для приближенного решениязадачи (1)-(2). Поскольку все производные, входящие в уравнение (1) квадратично суммируемы по области D, то по известной теореме о слабой компактности следует, что из органиченной последовательности функций $\{U^N\}$ можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность функции $\{U^{Ni}\}$ такую, что при $Ni\to\infty$ имеем

$U^{Ni}\to U$ слабо в $W_2^2(D)$

$\left|U_t^{Ni}\right|^p U_t^{Ni}\to\psi$ слабо в $L^j_{\frac{p+2}{p+i}}$

$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|U_t^{Ni}\right|^{p/2}U_t^{Ni}\right)\to\zeta_1$ слабо в $L_2^j(D)$

$\frac{\partial}{\partial xi}\left(\left|U_t^{Ni}\right|^{p/2}U_t^{Ni}\right)\to\zeta_2$ слабо в $L_2^j(D)$

$\frac{\partial\Delta U^{Ni}}{\partial t}\to\frac{\partial\Delta U}{\partial t}$ слабо в $L_2(D)$

Согласно лемме 1.3 из $[5, стр. 25]$ о передельном переходе в нелинейном члене имеем

$$\psi=|U_t|^{p|2}U_t;\ \zeta_2=\frac{\partial}{\partial t}(|U_t|^{p|2}U_t)$$

$$\zeta_2=\frac{\partial}{\partial xi}(|U_t|^{p|2}U_t)$$

Теперь мы можем осуществить предельный переход в тождестве (10) при $N_i\to\infty$. Тем самым существование регулярного решения рассмотрим разность двух возможных решений $V(x,t) = U_1 - U_2$ где U_1 *и* U_2 два решения задачи, тогда $V(x,t)$ удовлетворяет уравнение

$$LV = -\frac{\partial \Delta V}{\partial t} + K(x,t)V_{tt} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial xi^2} + \gamma V_t + \beta V + [J|U_{1t}|^p U_{1t} - |U_{2t}|^p U_{2t}]=0$$

(22)

$$\|V_{tt}\|_0^2 + \|V_t\|_0^2 + \|V_{tt}\|_{W_2^1(D)}^2 + \int_D e^{\lambda t} \lfloor |U_{1t}|^p U_{1t} - |U_{2t}|^p U_{2t} \rfloor (U_{1t} - U_{2t}) dD \leq 0 \qquad (15)$$

Учитывая монотонность оператора $|U_{1t}|^p U_{1t}$ получим

$$\int_D e^{\lambda t} \lfloor |U_{1t}|^p U_{1t} - |U_{2t}|^p U_{2t} \rfloor (U_{1t} - U_{2t}) dxdt \geq 0$$

Тогда из (15) следует, что $\|V_{tt}\|_0^2 + \|V_t\|_0^2 + \|V\|_{W_2^1}^2 \leq 0$ и значит V(x,t)≡ 0 т.е. $U_1(x,t) = U_2(x,t)$ *в* D. *Этот факт завершает доказательство теоремы*.

Литература

1. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов.-Ташкент.: Фан, 1979.
2. Кожанов А.И. Краевая задача для одного класса уравнений третьего порядка//Докл. АН СССР, 1979. Т.249,№3.С. 536-540.
3. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. -М.: Наука, 1973
4. Ларкин Н.А. Краевые задачи в целом для одного класса гиперболических уравнений. Сиб. Матем. Журн.,1977. Т. XVIII, №6. -С. 1441-1419
5. Лионс Ж.Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. -М.: Мир.,1972.
6. Салахитдинов М.С. Уравнения смешанно-составного типа. Ташкент.: ФАН, 1974.
7. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галёркина.М.:Мир, 1998.-С.346