ДВИЖЕНИЕ ПОРИСТЫХ СПЛОШНЫХ СРЕД НАСЫЩЕННЫХ ЖИДКОСТЬЮ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ

Улугбек Бекмуратов Нурали угли, *преподаватель,.*

*Алмалыкского филиала Ташкентского государственного технического университета им. Ислама Каримова****. г. Алмалык .Узбекистан***

Аннотация. В статье рассмотрена задача о движении частиц пористых насыщенных жидкостью сплошных сред при действии на них произвольных динамических нагрузок. С точки зрения теории указанная сплошная среда является одной из многочисленных моделей горных пород и мягких грунтов. Получен общее уравнение движение пористых насыщенных жидкостью сплошных сред в трехмерном пространстве при отсутствии массовых сил .Доказана что если на среду действует произвольная динамическая нагрузка, то в пространстве будет идти три волны, две из которых являются волнами сжатия (растяжения) , а третья волна является волной сдвига.

Ключевые слова: пористые сплошные среды насыщенные жидкостью, двухкомпонентная система, движения грунтов, твердый скелет, динамической внешней нагрузки, тензора напряжений скелета, тензора деформации**.**

Annotation. The article deals with the problem of motion of particles of porous liquid-saturated continuous media under the action of arbitrary dynamic loads on them. From the point of view of the theory, this continuous medium is one of the many models of rocks and soft soils. A General equation is obtained for the motion of porous liquid-saturated solid media in three-dimensional space in the absence of mass forces .It is proved that if an arbitrary dynamic load acts on the medium, then there will be three waves in space, two of which are compression (stretching) waves, and the third wave is a shear wave.

Keywords: porous solid media saturated with liquid, two-component system, soil movements, solid skeleton, dynamic external load, skeleton stress tensor, strain tensor.

В данной работе рассмотрим задачу о движении частиц пористых насыщенных жидкостью сплошных сред при действии на них произвольных динамических нагрузок. С точки зрения теории вышеуказанная сплошная среда является одной из многочисленных моделей горных пород и мягких грунтов. Предположим, что по определенному направлению на элемент сплошной среды, нормалью к которой является ϑ^r, действует сила. Если площадь поверхности элемента обозначим через, то тогда действующая сила на этот элемент будет равна $T^r dF$ Тогда, беря декартову систему координат в пространстве и рассматривая бесконечно малого тетраэдра в этом пространстве легко показать, что сила, проложенная в определенную точку, есть линейная однородная функция от нормали ϑ^r, т.е

$$T^r dF = E^{rs}_{\bullet\bullet} \vartheta^s dF \qquad (1)$$

Если содержание жидкости в порах единичного объема предположим равным β_0 то действующая в определенной точке пористой насыщенной жидкостью сплошной среды нагрузка распределяется пропорционального β_0, т.е.

$$T_1^r = (1-\beta_0) T^r \qquad (2)$$

$$T_2^r = \beta_0 T^r \qquad (3)$$

где $T_1^r dF_1$ и $T_2^r dF_2$ - усилия, действующие на твердый склет и на жидкость, и в декартовой системе координат они будут линейными однородными функциями нормали. Тогда силы, действующие, на твердый скелет и на жидкость в данном элементе будут соответственно равны:

$$T_1^r dF_1 = E^{rs}_{1\bullet\bullet} \vartheta_s dF_1 \qquad (4)$$

$$T_2^r dF_2 = E^{r}_{2\bullet\bullet} \vartheta_s dF_2 \qquad (5)$$

где через dF_1 и dF_2 обозначены поверхности, занимаемые твердым скелетом и жидкостью элементарной поверхности dF, причем

$$(1-\beta_0)dF = dF_1 \text{ и } \beta_0 dF = dF_2$$

В выражениях (4) и (5) тензоры $E_{1\bullet\bullet}^{rs}$ и $E_{2\bullet\bullet}^{rs}$ симметричны по r и s, и зависит только от координат точки, куда действует нагрузка. При том $E_{2\bullet\bullet}^{rs}$ не зависит от направления нормали ϑ_s. Это следует из закона Архимеда, т.е. в жидкостях напряжения на элементе всегда нормальны к этому элементу $E_{1\bullet\bullet}^{rs}$ является, контравариантным тензором второго ранга и его называем, тензором напряжения скелета. Пусть внутри пористой, насыщенной жидкостью сплошной среды некоторый объем $d\tau$ (из которого $\beta_0\tau$-занимает жидкость; $(1-\beta_0)d\tau$ —занимают твердые частицы скелета) ограничен поверхностью dF. Тогда условие динамического равновесия данного объема при действии динамической внешней нагрузки имеет вид:

$$\iint T_1^r \lambda_r^{(1)} dF_1 + \iiint [\rho_{11}(Q_1^r - f_1^r) + \rho_{12}(Q_2^r - f_2^r)]\lambda_r^{(1)}.d\tau_1 = 0$$

$$\iint T_2^r \lambda_r^{(2)} dF_2 + \iiint [\rho_{12}(Q_1^r - f_1^r) + \rho_{22}(Q_2^r - f_2^r)]\lambda_r^{(2)}.d\tau_2 = 0 \qquad (6)$$

где f_1^r и f_2^r - векторы ускорения твердых и жидких частиц

$d\tau_1$ и $d\tau_2$ – соответствующие элементарные объемы,

$\lambda_r^{(1)}$ и $\lambda_r^{(2)}$ - соответствующие произвольные постоянные.

Если ϑ_s – единичный вектор нормали к элементу поверхности, направленный во внешнюю сторону, то согласно (4) и (5) получим

$$\iint E_{1\bullet\bullet}^{rs} \lambda_r^{(1)} \vartheta_s dF_1 + \iiint [\rho_{11}(Q_1^r - f_1^r) + \rho_{12}(Q_2^r - f_2^r)]\lambda_r^{(1)} d\tau_1 = 0$$

$$\iint E_{2\bullet\bullet}^{rs} \lambda_r^{(2)} \vartheta_s dF_2 + \iiint [\rho_{12}(Q_1^r - f_1^r) + \rho_{22}(Q_2^r - f_2^r)]\lambda_r^{(2)} d\tau_2 = 0 \qquad (7)$$

Пользуясь теоремой Грина и учитывая, что $\lambda_{r,s} = 0$, систему (7) приводим к виду:

$$\iiint [\rho_{11}(Q_1^r - f_1^r) + \rho_{12}(Q_2^r - f_2^r) + E_{(1),\dots,S}^{rs}]\lambda_r^{(1)} d\tau_1 = 0$$

$$\iiint[\rho_{12}(Q_1^r - f_1^r) + \rho_{22}(Q_2^r - f_2^r) + E_{(2),...,S}^{rs}]\lambda_r^{(2)} d\tau_2 = 0 \qquad (8)$$

Причем, эти соотношения справедливы для любого объема и любого параллельного векторного поля λ_r. Следовательно, в каждой точке справедливы уравнения:

$$E_{(1),...,S}^{rs} + [\rho_{11}(Q_1^r - f_1^r) + \rho_{12}(Q_2^r - f_2^r)] = 0$$

$$E_{(2),...,S}^{rs} + [\rho_{12}(Q_1^r - f_1^r) + \rho_{22}(Q_2^r - f_2^r)] = 0 \qquad (9)$$

причем между массовыми коэффициентами скелета ρ_T и жидкости $\rho_Ж$ имеют место соотношения: $\rho_{11} + \rho_{12} = (1-\beta_0)\rho_T$

$$\rho_{12} + \rho_{22} = \beta_0 \rho_Ж \qquad (10)$$

где ρ_T - плотность скелета; $\rho_Ж$ - плотность заполняющей жидкости.

Система (9) является уравнением движения частиц пористой насыщенной жидкостью сплошной среды в тензором виде. При отсутствии массовых сил Q_1^r и эта система имеет вид:

$$E_{(1),..,S}^{rs} = \rho_{11} f_1^r + \rho_{12} f_1^r$$

$$E_{(2),..,S}^{rs} = \rho_{12} f_2^r + \rho_{22} f_2^r \qquad (11)$$

уравнения (11) могут быть записаны в ковариантной форме:

$$q^{sl} E_{(1)rs,1} = \rho_{11} f_{(1)r} + \rho_{12} f_{(1)r}$$

$$q^{sl} E_{(2)rs,1} = \rho_{12} f_{(2)r} + \rho_{22} f_{(2)r} \qquad (12)$$

учитывая свойства тензора $E_{(2)}$, т.е. $E_{(2)rs} = \sigma q_{rs}^{(1)}$, где σ — величина скалярная и обратная по знаку давлению и $q^{sl} E_{(2)rs,l} = q^{sl}(\sigma q_{rs})_t = q^{sl} \frac{\partial \sigma}{\partial x^r} q_{rs} = \frac{\partial \sigma}{\partial x^r}$ (13) систему (12) приводим к виду: $q^{sl} E_{(1)rs,l} = \rho_{11} f_{(1)r} + \rho_{12} f_{(2)r}$ $\quad \frac{\partial \sigma}{\partial x^r} = \rho_{12} f_{(1)r} + \rho_{22} f_{(2)r}$ (14)

Предположим, что при действии внешней нагрузки частицы скелета и жидкости, находящиеся до действия внешней нагрузки в точке x^r

,переместились соответственно на расстояние $\overrightarrow{u_r}$ и $\overrightarrow{U_r}$. тогда векторы ускорения этих частиц будут

$$f_{(1)r} = \frac{\partial \overrightarrow{u_r}}{\partial t^2}; \qquad f_{(2)r} = \frac{\partial \overrightarrow{U_r}}{\partial t^2} \tag{15}$$

и система (14) будет иметь вид:

$$q^{sl} E_{(1),rs,l} = \rho_{11} \frac{\partial^2 \overrightarrow{u}_r}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 \overrightarrow{U}_r}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial r} = \rho_{12} \frac{\partial^2 \overrightarrow{u}_r}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 \overrightarrow{U}_r}{\partial t^2} \tag{16}$$

Если зависимость тензора напряжений скелета от тензора деформации примем в виде:

$$E_{(1)rS} = C_{rs}^{mn} e_{mn} + Q \frac{\partial U_r}{\partial x^r} \tag{17}$$

где C_{rs}^{mn}-зависят только от координат и образуют смешанный тензор четвертого ранга, называемый тензором модулей упругости. Ясно также, что без ограничения общности этот тензор может быть выбран симметричным как по нижним, так и по верхним индексам.

Заменив тензор $E_{(1)rS}$ в (16) его выражением (17), получим:

$$q^{sl} C_{rs}^{mn} e_{mn,l} + q^{sl} C_{rs,l}^{mn} e_{mn} + Q \frac{\partial U_r}{\partial x^r} = \rho_{11} \frac{\partial^2 \overrightarrow{u}}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial \overrightarrow{U_r}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x^r} = \rho_{12} \frac{\partial \overrightarrow{u_r}}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial \overrightarrow{U_r}}{\partial t^2} \tag{18}$$

Это и есть общее уравнение движение пористых насыщенных жидкостью сплошных сред в трехмерном пространстве при отсутствии массовых сил. Если сплошная среда однородная, то одинаковая деформация в различных точках вызывает одинаковое напряжение. Значит $E_{(1)rS,l} = 0$, если $e_{rs,l} = 0$. Поэтому для того, чтобы среда была упруго однородной, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$C^{mn}_{rs,;} = 0 \qquad (19)$$

Рассмотрим теперь случай, когда пористая, насыщенная жидкостью сплошная среда однородная и изотропная, т.е. когда зависимость деформации от напряжения имеет следующий вид:

$$E_{(1)rs} = \theta q_{rs} + 2\mu e_{rs} + Q\varepsilon q_{rs}$$

$$\sigma = Q\theta + R\varepsilon \qquad (20)$$

где λ, μ, Q и R - упругие параметры среды,

θ и $\varepsilon -$ объемное расширение скелета и жидкости, т.е.

$$\theta = \vec{U}^{r}_{r} = q^{mn}.e_{mn} \qquad \varepsilon = \vec{U}^{r}_{r} = q^{mn}.\varepsilon_{mn} \qquad (21)$$

Соотношение (20) и (21) показывает, что для изотропной среды модули связаны

$$C^{mn}_{rs} = q^{mn}q_{rs} + \mu(\delta^{m}_{r}\delta^{n}_{s} + \delta^{n}_{r}\delta^{m}_{s}) \qquad (22)$$

Тогда тензор напряжения скелета примет вид:

$$q^{st}E_{(1)rs,l} = \frac{\partial\theta}{\partial x^{r}} + 2\mu q^{sl}e_{rs,l} + Q\frac{\partial\varepsilon}{\partial x^{r}}$$

где $$q^{sl}E_{(1)rs,l} = \frac{1}{2}q^{sl}(\vec{U}_{r,sl} + \vec{U}_{s,rl}) = \frac{1}{2}q^{sl}\vec{U}_{r,sl} + \frac{1}{2}\frac{\partial\theta}{\partial x^{r}}$$

Учитывая эти соотношения, уравнения движения упруго пористых насыщенных жидкостью сред, когда они однородны изотропные, будут иметь следующий вид:

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial x^{r}} + \mu q^{sl}\vec{U}_{r,sl} + Q\frac{\partial\varepsilon}{\partial x^{r}} = \rho_{11}\frac{\partial^{2}\vec{u}_{r}}{\partial t^{2}} + \rho_{12}\frac{\partial^{2}\vec{U}_{r}}{\partial t^{2}}$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x^{r}} = \rho_{12}\frac{\partial^{2}\vec{u}_{r}}{\partial t^{2}} + \rho_{22}\frac{\partial^{2}\vec{U}_{r}}{\partial t^{2}} \qquad (23)$$

где $\vec{u} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ - вектор смещения частиц скелета,

$\vec{U} = U\vec{i} + V\vec{j} + W\vec{k}$ - вектор смещения жидкости. В компонентах уравнения (23) имеет вид:

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x}+\mu\nabla u+Q\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}=\rho_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\rho_{12}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y}+\mu\nabla v+Q\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}=\rho_{11}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\rho_{12}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z}+\mu\nabla w+Q\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}=\rho_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\rho_{12}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$$

$$Q\frac{\partial\theta}{\partial x}+R\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}=\rho_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\rho_{12}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \qquad (24)$$

$$Q\frac{\partial\theta}{\partial y}+R\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}=\rho_{11}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\rho_{12}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

$$Q\frac{\partial\theta}{\partial z}+R\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}=\rho_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\rho_{12}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$$

Эту систему после некоторых «преобразованный» приводим к виду:

$$(\lambda+2\mu)\nabla\theta+Q\nabla\varepsilon=\rho_{11}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}+\rho_{12}\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2}$$

$$Q\nabla\theta+R\nabla\varepsilon=\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}+\rho_{12}\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2} \qquad (25)$$

$$\mu\nabla(rot\vec{u})=\rho_3\frac{\partial^2}{\partial t^2}(rot\vec{u}), \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}(rot\vec{U})=-\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}(rot\vec{u})$$

где $\rho_3=(1-\beta_0)\rho_T-\dfrac{\beta_0\rho_Ж\rho_{12}}{\beta_0\rho_Ж-\rho_{12}}$, ∇ - оператор Лапласа.

Учитывая (2), (3), (4), и (5) систему (11) приводим к виду:

$$E_{\bullet\bullet,s}=(\rho_{11}+\rho_{12})f_1^r+(\rho_{12}+\rho_{22})f_2^r$$

$$(1-2\beta_0)E^{sr}_{\bullet\bullet,s}=(\rho_{11}+\rho_{12})f_1^r+(\rho_{12}+\rho_{22})f_2^r \qquad (26)$$

Если допустим, что содержание жидкости от общего объема сплошной среды меньше 50% (иначе сплошная среда при содержании 50% и более жидкости будет приобретать свойства ползучести и такие сплошные среды мы не рассматриваем) то из (26) получим следующее: $f_2^r=kf_1^r$ (27), где kкоэффициент пропорциональности и определяется через другие параметры среды следующего выражения:

$$k = \frac{\beta_0(1-\beta_0)\rho_T - \rho_{12}}{\beta_0(1-\beta_0)\rho_Ж - \rho_{12}} \tag{27}$$

Значит в пористых , насыщенных жидкость однородных сплошных средах между векторами ускарения твердых и жидких частиц существует закон пропорциональности, который записывается в виде:

$$\frac{\partial^2 \overrightarrow{U}}{\partial t^2} = k\frac{\partial \vec{u}}{\partial t^2}; \tag{28}$$

В проекции выражение (27) имеет вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = k\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = k\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = k\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \tag{29}$$

Тогда из (29) очевидным образом следует, что

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = k\frac{\partial \theta}{\partial t^2} \tag{30}$$

Учитывая эти соотношения, уравнение движения (25) приводим к трем волновым уравнениям:

$$\nabla^2\theta = \frac{1}{a_1^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}; \quad \nabla^2\varepsilon = \frac{1}{a_2^2}\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2}; \quad \nabla(rot\overrightarrow{U}) = \frac{1}{b}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(rot\vec{u}). \tag{31}$$

где $$a_1 = [\lambda + 2\mu - \frac{Q^2}{R})/\rho_1]^{\frac{1}{2}}; \quad a_2 = [(\lambda + 2\mu - \frac{Q^2}{R})/\rho_2]^{\frac{1}{2}}; \quad b = (\frac{\mu}{\rho_3})^{\frac{1}{2}} \tag{32}$$

$$\rho_1 = (1-\beta_0)\rho_T - k\beta_0\frac{Q}{R}\rho_Ж + (k+1)(1+\frac{Q}{R})\rho_{12};$$

$$\rho_2 = \frac{1}{R}[(\lambda+2\mu)\beta_0\rho_Ж - \frac{(1-\beta_0)}{k}\bullet Q\rho_T - (1-\frac{1}{k})(\lambda+2\mu+Q)\rho_{12}] \tag{33}$$

В заключение отметим, что если пористая насыщенная жидкостью сплошная среда заполняет, трехмерное евклидово пространство и на нее действует произвольная динамическая нагрузка, в этом случае в трехмерном пространстве распространяется три типа волн, которые является волнами чистого сжатия (растяжения), идущие со скоростями a_1 и a_2 соответственно,

а третья волна идущая со скоростью b является волной сдвига. Скорости этих волн определятся соответственно из выражений (32) . Очевидно, что для однородно-упругой среды при определенных начальных и граничных условиях решение системы (30) не представляет никакого трудности. Итак движения частиц пористой, насыщенной жидкостью упругой сплошной среды, заполняющей трехмерное пространство, при действии на них динамических нагрузок описывается системой из шести дифференциальных уравнений
в частных производных, которая в свою очередь приводится к трем волновым уравнениям с тремя различными скоростями.

Библиографический список

1. Григорян С.С. «К решению задачи о подземном взрыве в мягих грунтах» Прикладная математика и механика, том 28, № 6 .1964 г.

2.Ишлинский А.Ю. ,Зволинский Н.Ю., Степаненко Н.З. «К динамике грунтовых масс». Дан СССР, 1954 г. , том 95, №4.

3.Николаевский В.Н. «К динамике насыщенных жидкостью, уплотняемых пористых сред»,
«Инженерный журнал» ,1962 г . , том 2, №3

4. Рахматуллин Х.А. Степанова Л.Н. «О распространении ударной волны взрыва в грунтах». В книге: “ Вопросы теории разрушения горных пород под воздействием взрыва”.М. , Изд-во АН СССР, 1958 г.

5.Сагоманян А.Я.«Одновременные движения грунта с плоскими цилиндрическими и сферическими волнами». В кн.:«Динамика грунтов». М. , Госстройиздат, 1961 г.

6.Френкель Я.И.«К теории сейсмических и сейсмо электрических явлений во влажной почве». Изд-во АН СССР ,серия география и геофизика, т. 8, № 4 1944