О КОРРЕКТНОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Бекмуратов улугбек Нурали угли

Ташкентский государственный технический университет
им. Ислама Каримова, филиал в г. Алмалык

Аннотация

На основе уравнений нестационарной фильтрации рассматривается общая методика аналитического решения задачи. Метод решения задачи основан на регуляризации внутренних особенностей и приведении её к задаче с граничными условиями**.**

Abstract

The General method of analytical solution of the problem is considered on the basis of non-stationary filtration equations. The method of solving the problem is based on regularization of internal features and reducing it to a problem with boundary conditions.

Ключевые слова: галерея, локальные и суммарные дебиты, внутренние и граничные условия, сумма разрывов производных функций, одностороннее интегральное преобразование Лапласа, методы теории функций комплексной переменной.

Keywords: gallery, local and total debits, internal and boundary conditions, sum of discontinuities of derived functions, one-way integral Laplace transform, methods of the theory of functions of a complex variable.

Постановка задачи. В настоящей работе дана постановка краевой задачи для системы параболических уравнений, связанных между собой внутренними граничными условиями, представляющими сумму разрывов производных функций в некоторых точках их задания. Для неё доказаны утверждения, свидетельствующие о существовании решения, непрерывно зависящего от параметров и условия краевой задачи, и тем самым подтверждается вышеуказанное предположение. Доказательство проведено сведением краевой задачи к системе интегральных уравнений типа Вольтерра относительно скачков производных функций, являющихся решением системы дифференциальных уравнений. К системе интегральных уравнений применяется одностороннее интегральное преобразование Лапласа решение преобразованной линейной функциональной системы получено методом теории функций комплексного переменного.

Система дифференциальных уравнений граничных и внутренних, а также начальных условий имеет вид [1,2]:

$$\frac{1}{\xi^\alpha} * \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi^\alpha * \frac{\partial P_i}{\partial \xi}\right) = \frac{1}{æ_i} * \frac{\partial P_i}{\partial t}, 0 < \xi < 1, i = \overline{1,n};\ t < 0\ (\alpha = 0 \text{ или } \alpha = 1); \quad (1)$$

$$P_i(\xi, 0) = \varphi_i(\xi) 0 < \xi < 1, \quad i = \overline{1,n} \qquad (2)$$

$$\left.\frac{\partial P_i}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = \left.\frac{\partial P_i}{\partial \xi}\right|_{\xi=1} = 0, \quad t > 0,\ \ i = \overline{1,n} \qquad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{n} (2\pi\xi_j)^\alpha * K_i \left(\left.\frac{\partial P_i}{\partial \xi}\right|_{\xi=\xi_{j+0}} - \left.\frac{\partial P_i}{\partial \xi}\right|_{\xi=\xi_{j-0}}\right) = \sum_{i=1}^{n} q_{ij}(t) = q_j(t), j = \overline{1,n} \qquad (4)$$

$$P_i \in C^2\big((\xi_k, \xi_{k+1}) \times (o, \infty)\big) \ \cap C\big((0,1) \times (0, \infty)\big),$$

$$\varphi_i \in C^1(\xi_k, \xi_{k+1}) \cap C(0,1), \qquad k = 0,1, \dots, m;\ \xi_0 = 0,$$

$$\xi_{m+1} = 1, \qquad q_{i,j}(t) \in C'(0, \infty), \qquad i = \overline{1,n};\ \ j = \overline{1,m}$$

Рассмотрим следующий функционал от решения $\{P_i(\xi, t)\}_{i=1}^n$ системы (1)-(4) и произвольного момента времени T>0.

$$J(T, \{P_i\}_{i=1}^n) = T + \max_{i,j} \underset{t>T}{Sup} \left|P_i(\xi_j, t) - P_{i+1}(\xi_j, t)\right|, \quad i = \overline{1,n};\ \ j = \overline{1,m} \qquad (5)$$

Теорема. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое T=T(ε)>0 и такое решение $\{P_i\}_{i=1}^n = \{P_i(\varepsilon)\}_{i=1}^n$ системы (1)-(4), удовлетворяющее перечисленным условиям, что $J(T(\varepsilon), \{P_i(\varepsilon)\}_{i=1}^n) < \varepsilon$. Причём это решение непрерывно зависит от начальных данных задачи от начальных данных задачи

$$æ_i, K_i, \varphi_i(x), i = \overline{1,n}\ ;\ \xi_j, q_i(t), j = \overline{1,m}$$

. Из этой теоремы следует, что

$$inf_{\{P_{i=1}^n\}} J(T, \{P_i\}_{i=1}^n) = 0.$$

Заметим, что в общем случае может не существовать решение $\{P_i\}_{i=1}^n$ системы (1)-(4), которое обращает в нуль функционал (5) (естественно, что при этом равно нулю). Для этого пришлось бы налагать слишком большие ограничения на $\varphi_i(x), i = \overline{1,n}$, которые не соответствуют реальным условиям.

Пусть $\alpha = 0$, получим следующую краевую задачу:

$$\frac{1}{æ_i} * \frac{\partial P_i}{\partial t} = \frac{\partial^2 P_i}{\partial x^2}, 0 < \mathrm{x} < 1, \mathrm{t} > 0, i = \overline{1,n} \qquad (1`)$$

$$P_i(x,0) = \varphi_i(x), 0 < \mathrm{x} < 1, i = \overline{1,n} \qquad (2`)$$

$$\left.\frac{\partial P_i}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial P_i}{\partial x}\right|_{x=1} = 0, \qquad i = \overline{1,n} \qquad (3`)$$

$$\sum_{i=1}^{n} K_i \left(\left.\frac{\partial P_i}{\partial x}\right|_{x=\xi_j+0} - \left.\frac{\partial P_i}{\partial x}\right|_{x=\xi_j-0} \right) = \sum_{i=1}^{n} q_{ij}(t) = q_j(t), \quad j = \overline{1,m} \qquad (4`)$$

где P_i, φ_i, q_{ij} удовлетворяют свойствам кусочной гладкости сформулированным выше.

Положим

$$U_i(x,t) = P_i(x,t) + \frac{x^2}{2K_i} \sum_{j=1}^{m} q_{ij}(t) - \frac{1}{K_i} \sum_{j=1}^{m} q_{ij}(t)(x-\xi_j)\theta(x-\xi_j)$$

где $\theta(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

Тогда $U_i(x,t)$ имеют непрерывные производные по x и по t в $(0{,}1) \times (0,\infty)$, $\quad i = \overline{1,n}$. Получаем:

$$\frac{1}{æ_i} * \frac{\partial U_i}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + F_i, \qquad 0 < x < 1, \ t > 0, \ i = \overline{1,n} \qquad (6)$$

$$U_i(x,0) = U_0^i(x), \quad 0 < x < 1, \qquad i = \overline{1,n} \qquad (7)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \frac{\partial U_i}{\partial x}\bigg|_{x=1} = 0, \qquad i = \overline{1,n} \tag{8}$$

Где

$$U_i^0(x) = \varphi_i(x) + \frac{x^2}{2K_i}\sum_{j=1}^{m} q_{ij}(0) - \frac{1}{K_i}\sum_{j=1}^{m} q_{ij}(0)(x-\xi_j)\theta(x-\xi_j),$$

$$F_i(x,t) = -\frac{æ_i}{K_i}\sum_{j=1}^{m} q_{ij}(t) + \frac{x^2}{2K_i}\sum_{j=1}^{m} q'_{ij}(t) - \frac{1}{K_i}\sum_{j=1}^{m} q'_{ij}(t)(x-\xi_j)\theta(x-\xi_j)$$

Решением (6)-(8) будет:

$$U_i(x,t) = \int_0^1 \varphi_i(x)dx -$$

$$-\frac{æ_i}{K_i}\int_0^1 \sum_{j=1}^{m} q_{ij}(\tau)d\tau - \frac{1}{K_i}\sum_{j=1}^{m} q_{ij}(t)\left(\frac{1}{3} - -\xi_j + \frac{1}{2}\xi_j^2\right)$$

$$+ 2\sum_{i=1}^{\infty}\left(e^{-(\pi n)^2 x_i t}\int_0^1 \varphi_i(x)\cos\pi l x dx\right.$$

$$+ \frac{1}{(\pi i)^2 K_i}\sum_{j=1}^{m} q_{ij}(t)\cos\pi l\xi_j$$

$$\left. - \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{m} q_{ij}(\tau)\cos\pi l\xi_j\right) e^{-(\pi l)^2 æ_i(t-\tau)}d\tau\right)\cos\pi l x$$

Тогда решение (1`)-(3`) является:

$$P_i(x,t) = U_i(x,t) - \frac{x^2}{2K_i}\sum_{j=1}^{m} q_{ij}(t) + \frac{1}{K_i}\sum_{j=1}^{m} q_{ij}(t)(x-\xi_j)\theta(x-\xi_j),\ \ j=\overline{1,m} \qquad (9)$$

Из вида самого этого решения очевидным образом следует его непрерывная зависимость от начальных данных. Теперь мы покажем, что можно для любого $\varepsilon > 0$ найти такое Т$(\varepsilon) > 0$ и так определить локальные дебиты $q_{ij}(t)$, чтобы они непрерывно зависели от начальных данных задачи (1`)-(4`), удовлетворяли условию (4`) и чтобы для функционала (5) выполнялось $J(T,\{P_i\}_{i=1}^n) < \varepsilon$, где $\{P_i\}_{i=1}^n$ решение, соответствующее данным дебитам. Наложим на решения $P_i, i=\overline{1,n}$ следующие условия

$$P_i(\xi_j,t) - P_{i+1}(\xi_j,t) = r_{ij}e^{-S_{ij}t},\quad i=\overline{1,n};\ \ j=\overline{1,m} \qquad (10)$$

Из условия (10) и формулы (9) получаем систему уравнений Вольтерра первого рода. К системе интегральных уравнений применяется одностороннее интегральное преобразование Лапласа [3]. Одностороннее преобразование Лапласа взаимно-однозначно для функции нуль при x<0, поэтому можно утверждать, что решение системы интегральных уравнений Вольтерра первого рода существует и единственно $(\alpha = 0)$. В заключении заметим, для того чтобы существовало решение $\{P_i(x,t)\}_{i=1}^n$ системы (1)-(4), для которого $J(0,\{P_i\}_{\tau=1}^n) = 0$ необходимо и достаточно, чтобы $\varphi_i(x_i) = \varphi_{i+1}(x), i=\overline{1,n-1}, j=\overline{1,m}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абуталиев Э.Б., Бекбаев К., Бекматов Ш. Нестационарная фильтрация и взаимодействие систем пластов при их совместной разработке. 1971-81 Деп.
2. Абуталиев Э.Б., Бабакаев С.Н., Бекматов Ш. Аналитическое решение краевой задачи нестационарной фильтрации и гидродинамического взаимодействия пластов в условиях их совместной разработки при заданном суммарном дебите. 3213-81 Деп.
3. Халмош П. Теория меры. М. ,1953.