NOMA'LUMLI NOCHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASINI YECHISH USULLARI VA QO'LLANILISHI HAQIDA

Ergashov Ozodbek Hotam o'g'li

Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan.e-mail:

ozodbekergashov2202@gmail.com

Annotatsiya. *Ushbu maqolada biz noma'lumli nochiziqli tenglamalar sistemasini yechish usullari va ikki o'lchovli (2D) simpleksda kvadratik stoxastik operatorni qo'zg'almas nuqtalarini topishda noma'lumli nochiziqli tenglamalar sistemasini qo'llanilishini ko'rib o'tamiz.*

Kalit so'zlar: *noma'lumli nochiziqli tenglamalar sistemasi* yoki transcendent, simpleks, kvadratik nostoxastik operator, qo'zg'almas nuqta.

Абстрактный. *В этой статье мы рассмотрим систему неизвестных систем семенных уравнений, а двумерная (2D) систематическая система квадратного стохастического оператора-это использование системы неубедительного нелинейного равновесия в присутствии неизвестных точек.*

Ключевые слова: *Система неизвестных нелинейных равнокон или трансцендентных, простого, квадратного нотоксатического оператора, точка Индии.*

Abstract: *In this paper, we will consider methods for solving systems of unknown nonlinear equations and the application of systems of unknown nonlinear equations to finding fixed points of a quadratic stochastic operator in a two-dimensional (2D) simplex.*

Key words: *A system of unknown nonlinear elinted linear-dimensional, simplex, square, square nostoxatic operator, an indialy point.*

Kirish va muammo bayoni. Fizika yoki biologiyadagi matematik modellarni o'rganish uzluksiz yoki diskret vaqtli kvadratik tasodifiy jarayonlarni o'rganishga keltiriladi. Bunday holda Kolmogorov-Chapman tenglamasini qanoatlantiradigan kubik matritsalar oilasini qurish muhim masala hisoblanadi. Maksimov tomonidan odatdagi matritsani ko'paytirishni umumlashtiruvchi kub matritsalarni assotsiativ ko'paytirish kiritildi. U kubik stoxastik matritsalarning analoglarini kiritdi va ularning ehtimollik talqinlarini berdi. Stoxastik matritsalarning kubik statsionarligi tavsiflandi va kubik stoxastik matritsaning statsionarga yaqinlashishi haqidagi tasdiqni isbotladi. Markov jarayoni tushunchasini umumlashtiruvchi Markov o'zaro ta'sir jarayoni tushunchasini kiritdi va bunday jarayonning ergodikligi tushunchasi tabiiy ravishda kub matritsalarni assotsiativ ko'paytirish bilan bog'liqligini ko'rsatdi. J.M.Kasas, M.Ladra va U.A.Rozikovlar tomonidan kubik stoxastik matritsalarning Markov jarayoni kiritildi.

Aytaylik, $I = \{1,2,\dots,m\}$ bo'lib, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ - I to'plamning ehtimollik taqsimoti ya'ni x

$$S^{m-1} = \left\{x = \left(x_1, x_2, \dots, x_m\right) \epsilon R^m;\ x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\ \right\} \tag{1}$$

$(m-1)$ o'lchovli simpliks elementi bo'lsin.

Kvadratik stoxastik operator deb S^{m-1} simpleksni o'zini-o'ziga akslantiruvchi quyidagi akslantirishga aytiladi:

$$V: x_k^{'} = \sum_{i,j=1}^{m} P_{ij,k} x_i x_j,\ \ k = 1,2,\dots,m \tag{2}$$

bu yerda $P_{ij,k}$ koeffitsiyentlar

$$P_{ij,k} \geq 0,\ P_{ij,k} = P_{ji,k},\ \sum_{k=1}^{m} P_{ij,k} = 1,\ \ i,j,k = 1,2,\dots,m \tag{3}$$

shartlarni qanoatlantiradi.

Har bir (3) shart bilan aniqlangan kvadratik stoxastik operator V biror

$\boldsymbol{P} = (P_{ij,k})_{\boldsymbol{i,j,k=1}}^{\boldsymbol{m}}$ kubik matritsa yordamida bir qiymatli aniqlanadi.

(2) ko'rinishida aniqlangan kvadratik stoxastik operator ta'sirida $x^{(0)} \in S^{m-1}$ boshlang'ich nuqtaning traektoriyasi (orbitasi) $\{x^{(n)}\}$ quyidagicha aniqlanadi:

$$x^{(n+1)} = V\left(x^{(n)}\right),\ n = 0,1,2, \dots.$$

Ta'rif [1]. Agar V operatorning yakobiani x^* qo'zg'almas nuqtada birlik doirada xos qiymatga ega bo'lmasa, u holda x^* nuqta giperbolik qo'zg'almas nuqta deyiladi.

Ko'plab amaliy masalalar nochiziqli tenglamalar sistemasini yechishga olib kelinadi. Umumiy holda n noma'limli n ta nochiziqli algebraik yoki transendent tenglamalar sistemasi quyidagicha yoziladi:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Ushbu (1) sistemani vektor shaklida quyidagicha yozish mumkin:

$$\mathrm{f(x)} = 0 \qquad (4')$$

bu yerda $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^{\mathrm{T}}$– argumentlarning vektor ustuni;

$(f_1, f_2, \dots, f_n)^{\mathrm{T}}$– funksiyalarning vektor ustuni; $(\dots)^{\mathrm{T}}$– transponirlash operatsiyasi belgisi. Nochiziqli tenglamalar sistemasi yechimini izlash – bu bitta nochiziqli tenglamani yechishga nisbatan ancha murakkab masala. Bitta tenglamani yechish uchun qo'llanilgan usullarni nochiziqli tenglamalar sistemasini yechishga umumlashtirish juda ko'p hisoblashlarni talab qiladi yoki uni amaliyotda qo'llab bo'lmaydi. Xususan, bu oraliqni teng ikkiga bo'lish usuliga tegishli. Shunga qaramasdan nochiziqli tenglamani yechishning bir qator iteratsion usullarini nochiziqli tenglamalar sistemasini yechishga umumlashtirish mumkin.

Ta'rif 1. Ikki noma'lumli nochiziqli tenglamalar sistemasi:

$$\begin{cases} f(x; y) = 0 \\ g(x; y) = 0 \end{cases}$$

Berilgan funksiya (x;y) larga bog'liq,ularni ushbu tizimning har bir tenglamasiga almashtirganda, haqiqiy tenglik olinadi.

Ikkita tenglamalar sistemasi, ulardan biri chiziqli shaklga ega

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ g(x;y) = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

Bu yerda a,b,c sonlar berilgan g(x;y) esa ikkita x va y larning funksiyasi.

Misol 1. Tenglamalar sistemasini yeching

$$\begin{cases} x + y - 8 = 0 \\ x^2 + y^2 - 82 = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

(2)Sistemaning birinchi tenglamasidan noma'lum y ni noma'lum x orqali ifodalaymiz va natijada olingan ifodani sistemaning ikkinchi tenglamasiga almashtiramiz:

$$\begin{cases} y = 8 - x \\ x^2 + y^2 - 82 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} y = 8 - x \\ x^2 + (8 - x)^2 - 82 = 0 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} y = 8 - x \\ x^2 - 8x - 9 = 0 \end{cases}$$

Tenglamani yechish:

$$x^2 - 8x - 9 = 0,$$

Ildizlarini toping

$$x_1 = -1, \; x_2 = 9$$

Demak,

$$y_1 = 8 - x_1 = 9, \quad y_2 = 8 - x_2 = -1$$

Shunday (3) sistemaning yechimi quyidagilar

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = 9 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_2 = 9 \\ y_2 = -1 \end{cases}$$

Ikki noma'lumli ikkinchi darajali bir jinsli tenglamalar.

Ta'rif 2. Ikkita noma'lum x va y bo'lgan ikkinchi darajali bir jinsli tenglama ko'rinishdagi tenglamadir.

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0$$

Bu yerda a,b,c lar koeffitsiyentlar.

Misol 2. Tenglamani yeching: $3x^2 - 8xy + 5y^2 = 0$ (7)

Yechim. y ning har bir qiymati uchun (7) tenglamani noma'lum x uchun kvadrat tenglama sifatida ko'rib chiqing. U holda (7) kvadrat tenglamaning diskriminanti D formula bilan ifodalanadi;

$$D = (8x)^2 - 60y^2 = 4y^2$$

Bu erdan kvadrat tenglamaning ildizlari formulasidan foydalanib, (7) tenglamaning ildizlarini topamiz:

$$x_1 = \frac{8y-2y}{6} = y \qquad x_2 = \frac{8y+2y}{6} = \frac{5}{3}y$$

Javob. (7) tenglamaning yechimlari quyidagi shakldagi sonlardir.

$$(y; y) \qquad \text{va} \qquad (\tfrac{5}{3}y; y)$$

Bu yerda y istalgan son.

Natija. (7) tenglamaning chap tomonini bunday ko'paytuvchilarga ajratish mumkin

$$3x^2 - 8xy + 5y^2 = 3(x-y)(x - \tfrac{5}{3}y)$$

Ikkinchi tartibli tenglamalar sistemasi, ulardan biri bir jinsli tenglamadir.

Bitta tenglamasi bir jinsli bo'lgan ikkinchi tartibli tenglamalar sistemasi quyidagi shaklga ega

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = 0, \\ g(x; y) = 0, \end{cases}$$

bu yerda a, b, c koeffitsiyentlar, g(x, y) esa ikkita x va y o‘zgaruvchilarning funksiyasi.

Misol 3. Tenglamalar sistemasini yeching

$$\begin{cases} 3x^2 + 2xy - y^2 = 0 \\ x^2 - 3xy = 16 \end{cases} \qquad (8)$$

Yechim. Dastlab bir jinsli tenglamani yechamiz

$$3x^2 + 2xy - y^2 = 0$$

Noma’lum x ga nisbatan kvadrat tenglama sifatida qaralsa;

$$x_1 = -y \qquad x_2 = \frac{1}{3}y$$

$x=-y$ bo'lganda, (8) sistemaning ikkinchi tenglamasidan foydalanamiz;

$4y^2 = 16$

ildizlar $y_1 = 2$ $y_2 = -2$. Ushbu qiymatlarning har biri uchun y ga mos keladigan x ning qiymatini topib, sistemaning ikkita yechimini olamiz: (-2;2), (2;-2)

Bunday holatda: $x = \frac{1}{3}y$

Sistemaning ikkinchi tenglamasidan foydalanamiz

$$-\frac{8}{9}y^2 = 16$$

Ildizlari yo’q. Javob: (-2;2), (2;-2)

Bir jinsliga keltiriladigan ikkinchi tartibli tenglamalar sistemasi

Misol 4 . Tenglamalar sistemasini yeching

$$\begin{cases} xy + 2y^2 = 12 \\ x^2 + 4xy = -20 \end{cases} \qquad (9)$$

Yechim. (9) sistemada quyidagi o’zgarishlarni kiritamiz.

1.Sistemaning ikkinchi tenglamasini o’zgarishsiz qoldiramiz;

2.Birinchi tenglamani 5 ga ikkinchi tenglamani 3ga ko’paytirib ikkalasini qo’shib yuboramiz hamda, sistemaning birinchi tenglamasi o’rniga natijani yozamiz.

Natijada (9) sistemaga ekvivalent bo’lgan (10) sistemamiz hosil qilinadi:

$$\begin{cases} 3x^2 + 17xy + 10y^2 = 0 \\ x^2 + 4xy = -20 \end{cases} \qquad (10)$$

Endi bir jinsli tenglamani yechamiz;

$$3x^2 + 17xy + 10y^2 = 0.$$

Noma’lum x ga kvadrat tenglama sifatida qaralsa;

$$x_1 = -5y \ , \quad x_2 = -\frac{2}{3}y$$

$x = -5y$ bo’lganida (7) sistemaning ikkinchi tenglamasidan foydalanamiz;

$$5y^2 = -20$$

Ildizlari yo’q,bunday holatda; $x = -\frac{2}{3}y$

(10)Sistemaning ikkinchi tenglamasidan foydalanamiz: - $\frac{20}{9}y^2 = -20$

ildizlar $y_1 = 3$,

$y_2 = -3$. Ushbu qiymatlarning har biri uchun y ga mos keladigan x ning qiymatini topib, biz sistemaning ikkita yechimini olamiz: (-2;3),(2;-3) .

noma'lumli nochiziqli tenglamalar sistemasini ikki o'lchamli S^2 simpleksda aniqlangan nostoxastik kvadratik operatorlarni qo'zg'almas nuqtasini aniqlashda qo'llaniladi

Misol 5.Ikki o'lchamli S^2 simpleksda aniqlangan nostoxastik kvadratik operatorga misol qaraymiz:

$$V_0: \begin{cases} x' = \frac{1}{2}(z-y)^2 + \frac{3}{2}x(y+z) \\ y' = \frac{1}{2}(x-z)^2 + \frac{3}{2}y(x+z) \\ z' = \frac{1}{2}(y-x)^2 + \frac{3}{2}z(y+x) \end{cases} \qquad (11)$$

tenglamani yechamiz.

Endi shu operatorni qo'zg'almas nuqtalarini topamiz

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(z-y)^2 + \frac{3}{2}x(y+z) \\ y = \frac{1}{2}(x-z)^2 + \frac{3}{2}y(x+z) \\ z = \frac{1}{2}(y-x)^2 + \frac{3}{2}z(y+x) \end{cases} \qquad (12)$$

tenglamani yechamiz. Simpleksning berilishiga ko'ra $x + y + z = 1$ ekanligdan inobatga olsak , u holda (12) tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(z-y)^2 + \frac{3}{2}x\left(y+z-\frac{2}{3}\right) = 0 \\ \frac{1}{2}(x-z)^2 + \frac{3}{2}y\left(x+z-\frac{2}{3}\right) = 0 \\ \frac{1}{2}(y-x)^2 + \frac{3}{2}z\left(y+x-\frac{2}{3}\right) = 0 \end{cases} \qquad (13)$$

ko'rinishga keladi . Agar $\begin{cases} x + z = 1 - y \\ x + y = 1 - z \\ y + z = 1 - x \end{cases}$ ekanligini inobatga olsak u holda $$\begin{cases}(z-y)^2+3x(\frac{1}{3}-x)=0\\(x-z)^2+3\,y(\frac{1}{3}-y)=0\\(y-x)^2+3\,z(\frac{1}{3}-z)=0\end{cases} \qquad (14)$$

Endi tenglamalar sistemasidagi ikkinchi tenglamadan birinchi tenglamani ayiramiz.Natijada

$$(x-z)^2+3\,y(\frac{1}{3}-y)-((z-y)^2+3x(\frac{1}{3}-x))=0$$

$$(\mathrm{x}-\mathrm{y})(\mathrm{x}+\mathrm{y}-2\mathrm{z})+(\mathrm{y}-\mathrm{x})+3\mathrm{x}^2-3\mathrm{y}^2=0$$

$$(\mathrm{x}-\mathrm{y})(\mathrm{x}+\mathrm{y}-2\mathrm{z})-(\mathrm{x}-\mathrm{y})+3(\mathrm{x}-\mathrm{y})(\mathrm{x}+\mathrm{y})=0$$

$$3(\mathrm{x}-\mathrm{y})(1-2\mathrm{z})=0 \qquad (15)$$

tenglamadan , 1) $\mathrm{x}-\mathrm{y}=0$

2) $1-2\mathrm{z}=0$

1-hol uchun ya’ni $\mathrm{x}=\mathrm{y}$ dan foydalanib tenglamalar sistemasidagi 3-tenglamaga qo’ysak

$$(y-x)^2+3\,z\left(\frac{1}{3}-z\right)=0$$

$$z(\frac{1}{3}-z)=0$$

Bundan ko’rinib turibdiki $z_1=0$, $z_2=\frac{1}{3}$

$x+y+z=1$ dan foydalanib $x_1=y_1=\frac{1}{2}$ va $x_2=y_2=\frac{1}{3}$ ekanligi kelib chiqadi

1-hol uchun 2 ta qo’zg’almas nuqta hosil bo’ldi

$$a_1=(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},0) \quad a_2=(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3})$$

2-Endi 2-hol uchun ko’ramiz ya’ni $z=\frac{1}{2}$ dan foydalanib tenglamalar sistemasidagi

3-tenglamaga etib qoyamiz

$$(y-x)^2=\frac{1}{4}$$

$$\mathrm{y}-\mathrm{x}=\pm\frac{1}{2}$$

$x+y+z=1$ dan foydalanib $\mathrm{x}+\mathrm{y}=\frac{1}{2}$ ekanligi kelib chiqadi ,

va ikkita sistema qilamiz. $\begin{cases}\mathrm{x}+\mathrm{y}=\frac{1}{2}\\ \mathrm{y}-\mathrm{x}=\frac{1}{2}\end{cases}$ va $\begin{cases}\mathrm{x}+\mathrm{y}=\frac{1}{2}\\ \mathrm{y}-\mathrm{x}=-\frac{1}{2}\end{cases}$

Birinchi sistemani yechimlari $y_3=\frac{1}{2}$, $x_3=0$

ikkinchi sistemani yechimlari $x_4=\frac{1}{2}$, $y_4=0$

Bundan ko'rinadiki $a_3=(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $a_4=(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$

Demak (4) berilgan operatorning qo'zg'almas nuqtasi to'rta ekan . Ular

$$a_1=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)\quad a_2=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}), a_3=(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}),\ a_4=(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$$

Misol 6

$$V:\begin{cases}x'=\frac{1}{2}x^2+2bxy+\frac{1}{2}y^2\\ y'=\frac{1}{2}x^2+2(1-b)xy+\frac{1}{2}y^2\\ z'=z(2-z)\end{cases}\qquad(16)$$

bu yerda, $b\in\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$.

(16) ko'rinishdagi operatorning qo'zgalmas nuqtalarini topamiz. Buning uchun quyidagi

$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}x^2+2bxy+\frac{1}{2}y^2\\ y=\frac{1}{2}x^2+2(1-b)xy+\frac{1}{2}y^2\\ z=z(2-z)\end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yechamiz.

Tenglamalar sistemasining 3-tengligidan $z=0, z=1$ ekanligi kelib chiqadi.

Agar

1) Agar $z=1$ bo‘lsin, u holda simpleksning berilishiga ko‘ra $x+y+z=1$ ekanligini inobatga olsak $x=y=0$ bo‘ladi. Demak, $e_1=(0,0,1)$ nuqta V kvadratik nostoxastik operatorning qo‘zg‘almas nuqtasi bo‘ladi.
2) Agar $z=0$ bo‘lsa, u holda $x+y+z=1$ shartdan $x+y=1$ ekanligi kelib chiqadi, $y=1-x$ tenglikni (13) tenglamalar sistemasining 1-tengligiga qo‘ysak,

$$x=\frac{1}{2}x^2+2bx(1-x)+\frac{1}{2}(1-x)^2$$

$Yoki$

$$(2-4b)x^2+(4b-4)x+1=0,$$

kvadrat tenglama hosil bo‘ladi . Biz shu kvadrat tenglamaning yechimlarini izlaymiz

$$D=(4b-4)^2-4(2-4b)=(4b-2)^2+4,$$

Bundan

$$x_{1,2}=\frac{2-2b\pm\sqrt{(2b-1)^2+1}}{2-4b}$$

ikkita qiymat topiladi.

Agar $t=2b-1$ deb belgilash olsak u holda $x_{1,2}=\frac{-t+1\pm\sqrt{t^2+1}}{-2t}$ bo‘ladi.

1) Agar $-1/2<b<1/2$ bo‘lsin, u holda $t\in(-2,0)$.

$x_1=\frac{-t+1+\sqrt{t^2+1}}{-2t}>1$ ekanligi ravshan. Chunki, $\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}>1$ bo‘lishidan $x_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2t}+\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}>1$ bo‘ladi. Demak, $x_1$ning qiymati birdan katta bo‘lganligi uchun $(x_1, 1-x_1, 0)$ nuqta S^2 simpleksga tegishli emas.

2) Agar $1/2 < b < 3/2$ bo‘lsin, u holda $t \in (0,2]$ bo‘lib, $x_1 = \frac{-t+1+\sqrt{t^2+1}}{-2t} < 0$ bo‘ladi.Bundan $(x_1, 1-x_1, 0)$ nuqtaning S^2 simpleksga tegishli emasligi kelib chiqadi

Oson ko‘rish mumkinki, $t \in [-2;2]\backslash\{0\}$ bo‘lganda $x_2 = \frac{-t+1-\sqrt{t^2+1}}{-2t} > 0$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

3) Agar $b = 1/2$ bo‘lganda V kvadratik nostoxastik operatorning qo‘zg‘almas nuqtasi $e_3 = (1/2, 1/2, 0)$ bo‘ladi.

Xulosa

Ushbu maqolada biz ikki o‘lchovli (2D) simpleksda kvadratik stoxastik bo‘lmagan operatorni ko‘rib chiqdik va operatorni qo‘zg‘almas nuqtalari topdik.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Devaney R. L. An introduction to chaotic dynamical system, Westview Press, 2003.
2. Rozikov U.A. Population dynamics: algebraic and probabilistic approach. *World Sci. Publ.* Singapore. 2020, 460 pp.
3. Rozikov U.A, Xudayarov S.S. Quadratic non-stochastic operators: examples of splitted chaos // Annals of Functional Analysis. 13:17 (2022). -- P. 1-17.
4. Casas J. M., Ladra M., Rozikov U.A. Markov processes of cubic stochastic matrices: Quadratic stochastic processes. Linear Algebra Appl. 575 (2019), 273–298
5. https://resolventa.ru/spr/algebra/system1.htm
6. https://science-education.ru/ru/article/view?id=548
7. https://solitaryroad.com/c630.html