KOMPLEKS SONLAR FAZOSIDA TETRADA XARAKTERISTIKASI

Sulaymonov Ilyoskhuja
O'zbekiston Milliy universiteti
1-kurs magistranti
E-mail: ilyosxojasulaymonov@gmail.com

Annotatsiya: Mazkur maqola zamonaviy funksiyalar nazariyasida qo'llaniladigan o'ziga xos qulayliklarga ega bo'lgan konform invariant yordamida elementar matematikaning ayrim bir masalalarini, shuningdek, kompleks sonlar yordamida matematik analizning ba'zi bir muhim masalalarini yechishga bag'ishlangan.

Kalit so'zlar: Kompleks fazo, kompleks son, xarakteristika, tetrada.

1. Kompleks son tushunchasi

Dekart koordinatalar sistemasida absissalar o'qida joylashgan nuqtalar to'plamini R_x deb, ordinatalar o'qida joylashgan nuqtalar to'plamini R_y deb belgilaylik. Ixtiyoriy $x \in R_x, y \in R_y$ haqiqiy sonlardan (x, y) juftlikni hosil qilamiz. Bunda, agar $y = 0$ bo'lsa, $(x, 0) = x$ deb qaraymiz. Bunday juftliklardan tashkil topgan

$$C = \{(x, y) : x \in R_x, y \in R_y\}$$

to'plamni tuzamiz.

Odatda, C to'plam elementi (x, y) juftlik kompleks son deyiladi va $z = (x, y)$ kabi belgilanadi[1].

Kompleks sonni darajaga ko'tarish va ildiz chiqarish

Bizga $z = re^{i\varphi}$ kompleks son berilgan bo'lsin. Bu kompleks sonni n marta o'z-o'ziga ko'paytirish natijasida quyidagi tenglikka ega bo'lamiz:

$$z \cdot z \cdot \ldots \cdot z = r \cdot r \cdot \ldots \cdot r \cdot e^{i\varphi} \cdot e^{i\varphi} \cdot \ldots \cdot e^{i\varphi} \Rightarrow z^n = r^n e^{in\varphi} \qquad (1)$$

Hosil bo'lgan (1) ifoda kompleks sonni n-darajasi deyiladi[1].

Ma'lumki

$$z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n (\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

Demak

$$z^n = r^n (\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

hosil bo'lgan (2) formula ***Muavr formulasi*** deyiladi[1].

Aytaylik $z \in C$ kompleks son va tayinlangan $n \in N$ sonlar berilgan bo'lsin. Ushbu

$$\xi^n = z$$

tenglikni qanoatlantiruvchi ξ kompleks son z kompleks sondan olingan n-darajali ildiz deyiladi va $\xi = \sqrt[n]{z}$ kabi belgilanadi. Demak,

$$\xi = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right)$$

1.3 Kompleks tekislikda ikki nuqta orasidagi masofa

Bizga ikkita $z_1 = x_1 + iy_1$ va $z_2 = x_2 + iy_2$ kompleks sonlar berilgan bo'lsin.

Ushbu

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

miqdor z_1 va z_2 nuqtalar orasidagi ***masofa(Evklid masofasi)*** deyiladi[2].

Ushbu,

$$\rho(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}}$$

miqdor z_1 va z_2 nuqtalar orasidagi ***sferik masofa*** deyiladi[2].

Kompleks tekislikda to'rtta nuqta orqali aniqlangan xarakteristika va uning xossalari

Kompleks tekislikda tartiblangan turli $T = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ (tetrada) nuqtalar berilgan bo'lsin. Ushbu

$$r(T) = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_1 - z_4)} \qquad (1)$$

miqdorni qaraymiz.

Ta'rif. (1) nisbat bilan aniqlanadigan miqdor $T = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ ***tetradaning xarakteristikasi*** deyiladi[3].

Quyida ushbu xarakteristikaning bir nechta xossalarini keltiramiz[3]

1. $r(z_1, z_2, z_3, z_4) = r(z_3, z_4, z_1, z_2) = r(z_2, z_1, z_4, z_3) = r(T)$

2. $r(z_2, z_1, z_3, z_4) = r(z_1, z_2, z_4, z_3) = \dfrac{1}{r(z_1, z_2, z_3, z_4)} = \dfrac{1}{r(T)}$

3. $r(z_1, z_3, z_2, z_4) = 1 - r(z_1, z_2, z_3, z_4) = 1 - r(T)$

4. $r(z_1, z_3, z_4, z_2) = r(z_2, z_3, z_1, z_4) = \dfrac{1}{1 - r(T)}$

5. $r(z_1,z_4,z_2,z_3)=1-\dfrac{1}{r(T)}$

6. $r(z_1,z_4,z_3,z_2)=1-\dfrac{1}{1-r(T)}=-\dfrac{r(T)}{1-r(T)}$

Quyida bu xossalardan ayrimlarini isbotini keltiramiz

$r(z_1,z_3,z_2,z_4)=1-r(z_1,z_2,z_3,z_4)=1-r(T)$

△ Ta'rifga ko'ra

$$r(z_1,z_3,z_2,z_4)=\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2}:\frac{z_1-z_4}{z_3-z_4}=\frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_3-z_2)(z_1-z_4)}=-\frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_2-z_3)(z_1-z_4)}=$$

$$=-\frac{z_1z_3-z_1z_4-z_2z_3+z_2z_4}{(z_2-z_3)(z_1-z_4)}=-\frac{z_1z_3-z_1z_4-z_2z_3+z_2z_4+z_1z_2+z_3z_4-z_1z_2-z_3z_4}{(z_2-z_3)(z_1-z_4)}=$$

$$=-\frac{(z_1z_2-z_1z_4-z_2z_3+z_3z_4)-(z_1z_2-z_2z_4-z_1z_3+z_3z_4)}{(z_2-z_3)(z_1-z_4)}=1-\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_2-z_3)(z_1-z_4)}$$

Bundan (1) formulaga ko'ra $r(z_1,z_3,z_2,z_4)=1-r(z_1,z_2,z_3,z_4)=1-r(T)$ ga ega bo'lamiz. ▲

$$r(z_1,z_4,z_2,z_3)=1-\frac{1}{r(T)}$$

△ Ta'rifga ko'ra

$$r(z_1,z_4,z_2,z_3)=\frac{(z_1-z_2)(z_4-z_3)}{(z_4-z_2)(z_1-z_3)}=\frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_2-z_4)(z_1-z_3)}=$$

$$=\frac{z_1z_3-z_1z_4-z_2z_3+z_2z_4}{(z_2-z_4)(z_1-z_3)}=\frac{z_1z_2-z_1z_4-z_2z_3+z_3z_4-z_1z_2+z_1z_3-z_3z_4+z_2z_4}{(z_2-z_4)(z_1-z_3)}=$$

$$=1-\frac{(z_2-z_3)(z_1-z_4)}{(z_2-z_4)(z_1-z_3)}=1-\frac{1}{\dfrac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_2-z_3)(z_1-z_4)}}$$

Bundan (1) formulaga ko'ra $r(z_1,z_4,z_2,z_3)=1-\dfrac{1}{r(T)}$ ga ega bo'lamiz. ▲

Tetrada xarakteristikasi orqali berilgan to'rtta nuqtaning ayrim xossalarini ham aytishimiz mumkin. Masalan berilgan to'rtta nuqta qachon bitta aylanada yoki bitta to'g'ri chiziqda yotadi?-degan savolga quyida teorema orqali javob berishimiz mumkin

Teorema. Berilgan to'rtta z_1, z_2, z_3, z_4 nuqta bitta aylanaga yoki bitta to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lishi uchun, ushbu tetradaning xarakteristikasi haqiqiy son bo'lishi zarur va yetarli.

△ Zarurligi. Faraz qilaylik z_1, z_2, z_3, z_4 sonlar kolleniar bo'lsin. U holda kolleniarlik shartiga ko'ra $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ va $\frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$ nisbatlar haqiqiy son bo'ladi. Haqiqiy sonlar ustidagi arifmetik amallarga ko'ra bu to'rtta nuqtaning xarakteristikasi ham haqiqiy son bo'ladi.

Endi ushbu z_1, z_2, z_3, z_4 nuqtalar bitta aylanaga tegishli bo'lsin. Quyidagi ikkita holatni qaraymiz

1) z_3 va z_4 nuqtalar $|z_1 - z_2|$ kesmaga nisbatan bitta yarimtekislikda yotadi

2) z_3 va z_4 nuqtalar $|z_1 - z_2|$ kesmaga nisbatan turli yarimtekislikda yotadi

1-hol uchun $\arg\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ va $\arg\frac{z_4 - z_1}{z_2 - z_4}$ oriyentatsiya burchaklari teng bo'ladi.

2-hol uchun $\arg\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} + \arg\frac{z_4 - z_1}{z_2 - z_4} = \pm\pi$ yoki $\arg\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} - \arg\frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} = \pm\pi$ bo'ladi. Bu ikkala holdan ushbu $\arg\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} - \arg\frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$ ayirma 0 yoki $\pm\pi$ ga teng bo'lishi kelib chiqadi. U holda $\arg\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} - \arg\frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} = \arg\left(\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}\right) = \arg r(T)$. Demak $r(T)$ -haqiqiy son

Yetarliligi. Agar tetrada xarakteristikasi haqiqiy son bo'lsa, u holda berilgan to'rtta nuqta yo kolleniar, yoki bitta aylanaga tegishli bo'ladi.

Haqiqatdan ham agar $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ haqiqiy son, hamda $\frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$ ham haqiqiy son bo'lsa, u holda kolleniarlik shartiga ko'ra z_1, z_2, z_3 kolleniar, z_1, z_2, z_4 kolleniar. Bundan z_1, z_2, z_3, z_4 ham kolleniar ekanligi kelib chiqadi. Endi agar $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ kompleks son, hamda $\frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$ ham kompleks son bo'lsa, u holda kolleniarlik sharti buziladi.

Ammo $\arg\left(\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}\right) = \arg\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} - \arg\frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} = 0$ yoki $\pm\pi$ bo'ladi.

Agar 0 ga teng bo’lsa $\arg\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}=\arg\frac{z_4-z_1}{z_2-z_4}$ bo’ladi. Agar $\pm\pi$ ga teng bo’lsa $\arg\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}-\arg\frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}=\pm\pi\Rightarrow\arg\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}+\arg\frac{z_4-z_1}{z_2-z_4}=\pm\pi$ bo’ladi.

1-holda z_3 va z_4 nuqtalarning $|z_1-z_2|$ kesmaga nisbatan burchaklari teng. Bu esa berilgan to’rtta nuqta ham aylanaga tegishli ekanligini bildiradi.

2-holda esa yig’indi to’rtburchakning qarama-qarshi burchaklari yig’indisini beradi. Demak to’rtburchak aylanaga ichki chizilgan. Bundan esa berilgan to’rtta nuqta bitta aylanada yotishi kelib chiqadi. ▲

Odatda bu teorema to’rtta nuqtaning bitta aylanada yoki bitta to’g’ri chiziqqa tegishli bo’lishi haqidagi teorema deyiladi.

Agar $f(z)$ tekislikda konform akslantirish bo’lsa, u holda ixtiyoriy T tetrada uchun $r(T)=r(f(T))$ o’rinli bo’ladi.

Quyida tetrada xarakteristikasiga oid ayrim misollarni qarab o’tamiz

1-misol. $r(T)=r(z_1,z_2,z_3,z_4)$ nuqtalarning xarakteristikalaridan biri $\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$ ga teng bo’lsa, qolgan barcha xarakteritikalari topilsin toping. z_1,z_2,z_3,z_4 nuqtalar hosil qilgan to’rtburchakning qarama-qarshi tomonlari ko’paytmasi diagonallari ko’paytmasiga tengligini isbotlang.

Yechim. Yuqoridagi tetrada xarakteristikasi xossalaridan foydalanamiz

1. $r(T)=\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$

2. $\frac{1}{r(T)}=\frac{1}{\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})}=\frac{2(1-i\sqrt{3})}{1+3}=\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$

3. $1-r(T)=1-\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})=\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$

4. $\frac{1}{1-r(T)}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})}=\frac{1}{\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})}=\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$

5. $1-\frac{1}{r(T)}=1-\frac{1}{\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})}=1-\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})=\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$

6. $$-\frac{r(T)}{1-r(T)}=\frac{\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})}{1-\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})}=\frac{\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})}{\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})}=\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}=\frac{(1+i\sqrt{3})^2}{1+3}=\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$$

Demak berilgan z_1,z_2,z_3,z_4 nuqtalarning xarakteristikasi $\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$ va $\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$ ga teng ekan.

Endi masalani ikkinchi shartiga o'tamiz. Bunga tetrada xarakteristikasini qo'llash natijasida biz quyidagiga ega bo'lamiz

$|z_1-z_2|\cdot|z_3-z_4|=\left|\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})\right|=1$ va $|z_1-z_3|\cdot|z_2-z_4|=\left|\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})\right|=1$ bundan to'rtburchakning qarama-qarshi tomonlari ko'paytmasi diagonallari ko'paytmasiga tengligi kelib chiqadi.

2-misol. Uchta z_1,z_2,z_3 nuqtalar berilgan. Shunday z nuqtalar to'plamini topingki, $r(z,z_1,z_2,z_3)$ xarakteristika o'zgarmas saqlansin

Yechim. Ta'rifga ko'ra

$$r(T)=r(z,z_1,z_2,z_3)=\frac{z-z_2}{z_1-z_2}:\frac{z-z_3}{z_1-z_3} \qquad (1)$$

Ushbu (1) formulani tetrada xarakteristik xossasidan foydalanib quyidagi ko'rinishda ham yozish mumkin

$$r(T)=\frac{b-m}{c-m}:\frac{b-a}{c-a} \qquad (2)$$

$\arg r(T)=\arg\left(\frac{z_2-z}{z_3-z}:\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right)=\varphi$ deb olsak hamda $\arg\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\alpha$ desak, u holda $\arg\frac{z_2-z}{z_3-z}=\varphi+\alpha$ bo'ladi. Demak M nuqtalar top'lami $|z_3-z_2|$ kesma o'zgarmas $\varphi+\alpha$ burchak ostida ko'rinuvchi barcha nuqtalar ekan.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Xudoyberganov G., Varisov A., Mansurov H. Kompleks analiz.Toshkent, ≪Universitet≫, 1998
2. Варисов А. Мёбиусовы преобразования, квазимёбиусовы вложения. Ташкент-2002\
3. П. Понарин. Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах. Москва – 2004