BA'ZI TENGLAMALARNI YECHISH USULLARI

B.B.Sharipova *XVPYMO'MM matematika fani o'qituvchisi*
Telefon:+998914320804,bibijon@gmail.com

Annotatsiya: Mazkur maqolada ba'zi tenglamalar va ualrni yechish usullari haqida so'z yuritiladi.

Kalit so'zlar: noma'lum son,tenglama, o'ng qismi, val-muqobala, ildiz, kvadrat tenglama, Ferrari usullari, Al-Xorazmiy, tenglamani yechish

Tenglama- matematikaning eng muhim tushunchalaridan biri. Ko'pgina amaliy va ilmiy masalalarda biror kattalikni bevosita o'lchash yoki tayyor formula bo'yicha hisoblash mumkin bo'lmasa, bu miqdor qanotlantiradigan munosabat tuzishga erishiladi. Noma'lum kattalikni aniqlash uchun tenglama ana shunday hosil qilinadi. Matematikaning fan sifatida vujudaga kelganidan boshlab uzoq vaqtgacha tenglamalar yechish metodlarini rivojlantirish algebraning asosiy masalalaridan biri bo'lgan.

Harf bilan belgilangan noma'lum son qatnashgan tenglik tenglama deyiladi.Tenglik belgisidan chap va o'ngda turgan ifodalar tenglamaning chap va o'ng qismlari deyiladi. Tenglamaning chap yoki o'ng qismidagi har bir qo'shiluvchi tenglamaning hadi deyiladi. Tenglamani yechish – noma'lumlarning tenglamani to'g'ri tenglikka aylantiradigan barcha qiymatlarini topish yoki bunday qiymatla yo'qligini ko'rsatish demakdir. Misol uchun, quyidagi

$10x + 80 = 360$ tenglamada chap qismi:$10x + 80$, o'ng qism esa 360. So'ngra $x = 28$ bo'lganda shu tenglamaning chap qismi 360 ga teng, chunki $10\cdot28 + 80=360$; o'ng qismi ham 360 ga teng. Demak, $x = 280$ bo'lganda bu tenglama to'g'ri tenglikka aylanadi: $10\cdot28 +80 = 360$. Shu 28 soni berilgan tenglamaning ildizi deyiladi.

Ko'pgina amaliy masalalarni yechish $mx=n$ (1)
ko'rinishdagi tenglamaga keltiriladi, bunda m va n – berilgan sonlar. x – noma'lum son. (1) tenglama chiziqli tenglama deb ataladi.

Al-Xorazmiyning "Kitob al-muxtasar fi hisob al jabr val-muqobala" asaridagi al-jabr musbat hadlarni tiklash, ya'ni manfiy hadlarni tenglamaning bir qismidan ikkinchi qismiga musbat qilib o'tkazishni, val-muqobala esa tenglamaning ikkala qismidan teng hadlarni tashlab yuborishni bildirgan.

1-masala. $8x – 18 = 6x – 10$ tenglamani yeching

Yechish. x son berilgan tenglamaning ildizi, ya’ni x shunday sonki, uni tenglamaga qo‘yilganda tenglama to‘g‘ri tenglikka aylanadi, deb faraz qilamiz. Noma’lum qatnashgan $6x$ hadni “ – ” ishora bilan tenglikning chap qismiga, -18 hadni “+” ishora bilan o‘ng qismiga olib o‘tamiz.

Natijada yana tog‘ri tenglik hosil bo‘ladi:

$$8x - 6x = 18 - 10.$$

Tenglamaning ikkala qismidagi o‘xshash hadlarni ixchamlab,

$$2x = 8$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamaning ikkala qismini 2 ga bo‘lib, $x = 4$ ekanini topamiz.

Shunday qilib, tenglama ildizga ega deb faraz qilib, bu ildiz faqat 4 soniga teng bo‘lishi mumkinligini ko‘rdik. $x = 4$ haqiqatan ham berilgan tenglamaning ildizi bo‘lishini tekshiramiz: $8 \cdot 4 - 18 = 6 \cdot 4 - 10$. Bu to‘g‘ri tenglik, chunki uning chap va o‘ng qismlari birgina 14 soniga teng.

Demak, berilgan tenglama faqat bitta ildizga ega: $x = 4$.

Tenglamani yechishda tenglamaning quyidagi *asosiy xossalaridan* foydalaniladi.

1-xossa. Tenglamaning istalgan hadi ishorasini qarama-qarshisiga o‘zgartirib, uning bir qismidan ikkinchi qismiga o‘tkazish mumkin.

2-xossa. Tenglamaning ikkala qismini nolga teng bo‘lmagan bir xil songa ko‘paytirish yoki bo‘lish mumkin.

Bu xossalar bir noma’lumli istalgan tenglamani yechish imkonini beradi. Buning uchun:

1) noma’lum qatnashgan hadlarni tenglikning chap qismiga noma’lum qatnashmagan hadlarni esa o‘ng qismiga o‘tkazish lozim (1-xossa);

2) o‘xshash hadlarni ixchamlash kerak;

3) tenglamaning ikkala qismini noma’lum oldida turgan koeffitsiyentga (agar u nolga teng bo‘lmasa) bo‘lish (2-xossa) kerak.

Maktab matematika kursida , odatda, noma’lumlari son qiymatlar qabul qiladigan tenglamalar qaraladi. Bir noma’lumli tenglamada nom’lumning tenglamani qanotlantiruvchi son qiymati bu tenglamaning ildizi yoki yechimi deyiladi. Bir necha noma’lumli tenglamani qanoatlantiruvchi sonlar termasi bu tenglamaning yechimi deyiladi.

Matematikada noma’lumlari butun sonlar (Diofant tenglamalri), vektorlar (vektorial tenglamalar), funksiyalar (integral, funksional, differinsial tenglamalar)va boshqa tabiatli ob’ektlar bo‘lgan tenglamalar ham qaraladi. Tenglama bilan birga uning aniqlanish sohasi (noma'lumning ruxsat etiladigan qiymatlari to'plami) ni ham ko'rsatishadi; agar ruxsat etiladigan qiymatlar to'plami ko'rsatilgan bo'lmasa, bu to'plam- tenglamaning chap va o'ng tomonlarida turgan ifodalarning tabiiy umumiy aniqlanish sohasi deb faraz qilinadi. Tenglamarni bizga odat bo'lib qolgan harfiy yozilishi XIV asrda uzil-kesil shakllandi; noma'lumlarni lotin alifbosinig oxirgi $x, y, z, \ldots$ harflari, ma'lum miqdorlar (parametrlar) ni latin alifbosining dastlabki $a, b, c, \ldots$harflari orqali belgilash an'anasini fransuz olimi R. Dekartdan boshlangan.

Tenglamalarni algebraik yechishning odatdagi yo'li (ko'pincha, analitik yechish deyiladi) shundan iboratki, uni almashtirishlar yordamida soddaroq tenglamarga keltirishadi. Agar bir tenglamaning barcha yechimlari ikkinchi tenglamaning ham yechimlari bo'lsa, u holdaikkinchi tenglama birinchisining natijasi deyiladi. Agar ikkata tenglamadan har biri boshqasining natijasi bo'lsa bunday tenglamalar teng kuchli tenglamalar deyiladi. Tenglamaning ikkala tomoniga bir xil almashtirishni qo'llab, biz uning natijasini hosil qilamiz. Agar bu almashtirish teskarilanuvchan bo'lsa,hosil qilingan tenglama berilganiga teng kuchli bo'ladi. (masalan tenglamaning ikala tomonini bir xil songa ko'paytirsak, biz berilgan tenglamaning natijasini olamiz. Agar bu son noldan farqli bo'lsa, u holda bajarilgan almashtirish teskarilanuvchan , binobarin, hosil qilingan tenglama dastlabkisiga teng kuchli bo'ladi).

Bir noma'lumli tenglamani yechish borasida biz eng sodda tenglamalarga kelishga intilamiz, chunki, ular uchun tayyor formulalar bor . Chiziqli tenglamalar,kvadrat tenglamalar, $\varphi(x)=c$ ko'rinishdagi tenglamalar eng sodda tenglamalardir, bunda c-son, φ- asosiy elementar funksiyalardan biri; $\varphi(x)=x^n$ - darajali, $\varphi(x)=a^x$ - ko'rsatkichli, $\varphi(x)=\log_a x$ - logarifmik, $\varphi(x)=\sin x$, $\varphi(x)=\cos x$, $\varphi(x)=tgx$ - trigonometrik funksiyalar. $\varphi(x)=c$ tenglamaning umumiy yechiminiyozish φ funksiyaga teskari bo'lgan ψ funksiyani kiritishni talab qiladi. Agar $\varphi(x)=x^n$ bo'lsa, u holda $\psi(c)=\sqrt[n]{c}$; agar $\varphi(x)=a^x$ bo'lsa, u holda $\psi(c)=\log_a c$; agar $\varphi(x)=\sin x$ va $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ bo'lsa, u holda $\psi(c)=\arcsin c\ldots$

Agar $f(x)=0$ tenglamaning chap tomonidan $f(x)=f_1(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)$ ko‘paytuchilarga yoyishga erishilsa, u holda berilgan tenglama $f_1(x)=0$, $f_2(x)=0,\ \ldots,\ f_n(x)=0$ tenglamalarga ajraladi, ular yechimlari to‘plamlarining birlashmasi olingan tenglamaning yechimlar to‘plamini beradi.

Ba’zan tenglamaning chap va o‘ng tomonidagi ifodalarning funksional xossalarini tahlil qilib, yechishga muvaffaq bo‘linadi. Masalan, $2^x+3^x=5$ tenglamaningchap tomoni o‘suvchi, o‘ng tomoni esa o‘zgarmas bo‘lgani uchun bu tenglama bittadan ortiq ildizga ega emas. Yagona ildiz $x=1$ esa oson payqaladi. $\sin^3 x+\cos^5 x=\sqrt{2}$ tenglamani yechayotib barcha x lar uchun $\sin^3 x\le\sin^2 x,\ \cos^5 x\le\cos^2 x$ tengsizliklar bajarilishini hisobga olamiz, u holda $\sin^3 x+\cos^5 x\le\sin^2 x+\cos^2=1$, ammo $\sqrt{2}>1$, binobarin, berilagan tenglama ildizlarga ega emas.

Maktab matematikasida biz tenglama ildizini son yoki parametrning ma’lum funksiyalari kombinatsiyasi sifatida topishga imkon beradigan usullarni o‘rganamiz. Ammo amaliyotda paydo bo‘ladigan hamma tenlamalarni ham shunga o‘xshash usullar bilan yechib bo‘lmaydi. Masalan, beshinchi darajadan boshlab algebraik tenglamalarni yechish uchun umumiy formula mavjud emasligini XIX asr boshida isbotlandi. Shuning uchun ham , matematikada tenglamalarni taqribiy yechishning taqribiyyechishning turli metodlari ishlabb chiqilgan. Uchinchi darajali tenglamalarni Kardano formulasi yordamida, to‘rtinchi darajali tenglamalarni Ferrari usullari yordamida yechish usulllari aniqlandi. Ulardan eng soddasi quyidagi teoremaga asoslanadi, agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmaning barcha nuqtalarida uzluksiz bo‘lsa va uning chetki uchlarida turli ishorali qiymatlarni qabul qilsa, u holda $f(x)=0$ tenglama bu kesmada ildizga ega.

Ikkinchi darajali bir noma’lumli tenglama soddalashtirishdan keyin

$$ax^2+bx+c=0 \quad (2)$$

ko‘rinishga keltiriladi.

Tenglamaning o‘ng tomonidan to‘la kvadrat ajratamiz: $a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c=0$ yoki $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}=-c$ bundan

$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a}-c=\frac{b^2-4ac}{4a}$ yoki $(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ ikkala tomonidan kvadrat ildiz topamiz:

$$x_{1,2}=\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ va } x_{1,2}=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ yoki } x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

(3)

b^2-$4ac$ kvadrat tenglamaning diskriminanti deyiladi va D bilan belgilanadi: D=b^2-$4ac$.

1. Agar D>0 bo‘lsa, (2) tenglama $x_1 \neq x_2$ haqiqiy ildizlarga ega bo‘ladi;
2. Agar D=0 bo‘lsa, (2) tenglama $x_1=x_2$ haqiqiy ildizlarga ega bo‘ladi;
3. Agar D<0 bo‘lsa, (2) tenglama kompleks ildizlarga ega bo‘ladi.

$x^2+px+q=0$ (4) ko‘rinishidagi tenglama keltirilgan kvadrat tenglama deb aytiladi. Buni yechish uchun (3) formuladan tashqari yana

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \qquad (5)$$

formuladan foydalanish mumkin.

Misol: x^2-6x+5=0 tenglamani yechamiz.

Xususiy holda kvadrat tenglama. $x_{1,2}=3\pm\sqrt{9-5}=3\pm 2;\ x_1=1;\ x_2=5$.

$ax^2+2kx+c=0$ (5) ko‘rinishda bo‘lsa, ildizlarini

$$x_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a} \qquad (6)$$

formula yordamida topish qulay bo‘ladi.

Agar x_1 va x_2 kvadrat tenglama (2) yoki (4) ning ildizlari bo‘lsa, u holda

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

$x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)$ bo‘ladi.

Xulosa qilib aytadigan bo‘sak, tenglamalar xilma xil bo‘lgani singari, uni yechish usullari ham turlichadir. Tenglamalarni qaysidir ma’noda “standartlashdirish”, ya’ni ularni yechish usullari bo‘yicha klassifikatsiyalash, yechish usulini ilmiy asoslash matematikaning vazifalaridan biridir.

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati:

1. Олехник С.Н., Потапов М.К. Нестандартные методы решения уравнений и неравенств. М.:МГУ, 1991,-144с.
2. Супрун В.П. Математика для старшеклассников. Нестандартные методы решения задач. – М. Книжный дом «Либриком». 2009.-272с.