YUQORI TARTIBLI HOSILALAR

Abdufayozov Jahongir Faxriddin o‘g‘li
Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti qoshidagi
akademik litsey matematika fani
o‘qituvchisi jahongirmom@gmail.com

Annotatsiya:Ushbu maqolada Yuqori tartibli hosilalar hamda ularni yechish usullari,yuqori tartibli hosilalariga oid misol va masalalarni yechish hamda ularning yechimlari haqida ma'lumotlar berilgan.

Kalit so'zlar: Yuqori tartibli hosilalar,teorema,simvollar,rekkurent,qiymat,hosila.
Faraz qilaylik, biror (a,b) da hosilaga ega $f(x)$ funksiya aniqlangan bo‘ lsin. Ravshanki, $f'(x)$ hosila (a,b) da aniqlangan funksiya bo‘ ladi. Demak, hosil bo‘ lgan funksiyaning hosilasi, ya’ ni hosilaning hosilasi haqida gapirish mumkin. Agar $f'(x)$ funksiyaning hosilasi mavjud bo‘ lsa, uni $f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi deyiladi va y'', $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ simvollarning biri bilan belgilanadi. Shunday qilib, ta’ rif bo‘ yicha $y''(x)=(y')'$ ekan.

Shunga o‘ xshash, agar ikkinchi tartibli hosilaning hosilasi mavjud bo‘ lsa, u uchinchi tartibli hosila deyiladi va y''', $f'''(x)$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^3f(x)}{dx^3}$ kabi belgilanadi. Demak, ta’ rif bo‘ yicha $y'''=(y'')'$.

Berilgan funksiyaning to‘ rtinchi va h.k. tartibdagi hosilalari xuddi shunga o‘ xshash aniqlanadi. Umuman $f(x)$ funksiyaning $(n-1)$-tartibli $f^{(n-1)}(x)$ hosilasining hosilasiga uning n-tartibli hosilasi deyiladi va $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^ny}{dx^n}$, $\frac{d^nf(x)}{dx^n}$ simvollarning biri bilan belgilanadi. Demak, ta’ rif bo‘ yicha n-tartibli hosila $y^{(n)}=(y^{(n-1)})'$ rekkurent (qaytma) formula bilan hisoblanar ekan.

Misol. $y=x^4$ funksiya berilgan. $y'''(2)$ ni hisoblang.

Yechish. $y'=4x^3$, $y''=12x^2$, $y'''=24x$, demak $y'''(2)=24\cdot 2=48$.

Yuqorida aytilganlardan, funksiyaning yuqori tartibli, masalan, n- tartibli hosilalarini topish uchun uning barcha oldingi tartibli hosilalarini hisoblash zarurligi kelib chiqadi. Ammo ayrim funksiyalarning yuqori tartibli hosilalari uchun umumiy qonuniyatni topish va undan foydalanib formula keltirib chiqarish mumkin.

Misol tariqasida ba’ zi bir elementar funksiyalarning n-tartibli hosilalarini topamiz.

1) $y=x^{\mu}$ $(x>0,\ \mu\in R)$ funksiya uchun $y^{(n)}$ ni topamiz. Buning uchun uning hosilalarini ketma-ket hisoblaymiz: $y'=\mu x^{\mu-1}$, $y''=\mu(\mu-1)x^{\mu-2}$, . . .
Bundan

$$(x^{\mu})^{(n)}=\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)x^{\mu-n} \qquad (8.1)$$

deb induktiv faraz qilish mumkinligi kelib chiqadi. Bu formulaning n=1 uchun o‘ rinliligi yuqorida ko‘ rsatilgan. Endi (1) formula $n=k$ da o‘ rinli, ya’ ni $y^{(k)}=\mu(\mu-1)...(\mu-k+1)x^{\mu-k}$ bo‘ lsin deb, uning $n=k+1$ da o‘ rinli bo‘ lishini ko‘ rsatamiz.

Ta’ rifga ko‘ ra $y^{(k+1)}=(y^{(k)})'$. Shuning uchun

$$y^{(k+1)}=(y^{(k)})=(\mu(\mu-1)...(\mu-k+1)x^{\mu-k})'=\mu(\mu-1)...(\mu-k+1)(\mu-k)x^{\mu-k-1}$$

bo‘ lishi kelib chiqadi. Bu esa (8.1) formulaning $n=k+1$ da ham o‘ rinli bo‘ lishini bildiradi. Demak, matematik induksiya usuliga ko‘ ra (8.1) formula $\forall n\in N$ uchun o‘ rinli.

(8.1) da μ=-1 bo‘ lsin. U holda $y=\frac{1}{x}$ funksiyaning n-tartibli hosilasi

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=(-1)(-2)...(-n)x^{-1-n}=\frac{(-1)^n\cdot n!}{x^{n+1}} \qquad (8.2)$$

formula bilan topiladi.

2) $y=lnx$ (x>0) funksiyaning n-tartibli hosilasini topamiz. Bu funksiyainng birinchi hosilasi $y'=\frac{1}{x}$ bo‘ lishidan hamda (8.2) formuladan foydalansak,

$$y^{(n)}=(y')^{(n-1)}=\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \qquad (8.3)$$

formula kelib chiqadi.

3) $y=sinx$ bo‘ lsin. Ma’ lumki, bu funksiya uchun $y'=cosx$. Biz uni quyidagi

$$y'=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$$

ko‘ rinishda yozib olamiz. So‘ ngra $y=sinx$ funksiyaning keyingi tartibli hosilalarini hisoblaymiz.

$$y''=(\cos x)'=-\sin x=\sin(x+2\cdot\frac{\pi}{2}),$$

$$y'''=(-\sin x)'=-\cos x=\sin(x+3\cdot\frac{\pi}{2}),$$

$$y^{(IV)})=(-\cos x)'=\sin x=\sin(x+4\cdot\frac{\pi}{2})$$

Bu ifodalardan esa $y=sinx$ funksiyainng n-tartibli hosilasi uchun

$$y^{(n)}=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2}) \qquad (8.4)$$

formula kelib chiqadi. Uning to‘ g‘ riligi yana matematik induksiya usuli bilan isbotlanadi.

Xuddi shunga o‘ xshash

$$(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\frac{\pi}{2}) \qquad (8.5)$$

ekanligini ko‘ rsatish mumkin.

Masalan,

$$(\cos x)^{(115)} = \cos(x + 115\cdot\frac{\pi}{2}) = \cos(x + \frac{3\pi}{2}) = \sin x .$$

Ikkinchi tartibli hosilaning mexanik ma' nosi.

Ikkinchi tartibli hosila sodda mexanik ma' noga ega. Faraz qilaylik moddiy nuqtaning harakat qonuni $s=s(t)$ funksiya bilan aniqlangan bo' lsin. U holda uning birinchi tartibli hosilasi $v(t)=s'(t)$ harakat tezligini ifodalashi bizga ma' lum. Ikkinchi tartibli $a=v'(t)=s''(t)$ hosila esa harakat tezligining o' zgarish tezligi, ya' ni harakat tezlanishini ifodalaydi.

Misol. Moddiy nuqta $s=5t^2+3t+12$ (s metrlarda, t sekundlarda berilgan) qonun bo' yicha to' g' ri chiziqli harakat qilmoqda. Uning o'zgarmas kuch ta'sirida harakat qilishini ko'rsating.

Yechish. $s'=(5t^2+3t+12)'=10t+3;$ $s''=(10t+3)'=10$, bundan $a=10m/s^2$ bo'lib, harakat tezlanishi o'zgarmas ekan. Nьyuton qonuni bo'yicha kuch tezlanishga proportsional. Demak, kuch ham o' zgarmas ekan.

Yuqori tartibli hosilaning xossalari. Leybnits formulasi

1-xossa. Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar n-tartibli hosilalarga ega bo' lsa, u holda bu ikki funksiya yig' indisining n -tartibli hosilasi uchun

$$(u(x)+v(x))^{(n)}=u^{(n)}(x)+v^{(n)}(x)$$

formula o' rinli bo' ladi.

Aytaylik $y=u+v$ bo' lsin. Bu funksiyaning hosilalarini ketma-ket hisoblash natijasida quyidagilarni hosil qilamiz: $y'=u'+v'$, $y''=(y')'=(u'+v')'=u''+v''$.

Matematik induksiya metodidan foydalanamiz, ya' ni $n=k$ tartibli hosila uchun $y^{(k)}=u^{(k)}+v^{(k)}$ tenglik o' rinli bo' lsin deb faraz qilamiz va $n=k+1$ uchun $y^{(k+1)}=u^{(k+1)}+v^{(k+1)}$ ekanligini ko' rsatamiz.

Haqiqatan ham, yuqori tartibli hosilaning ta' rifi, hosilaga ega bo' lgan funksiyalar xossalaridan foydalanib $y^{(k+1)}=(y^{(k)})'=(u^{(k)}+v^{(k)})' = =(u^{(k)})'+(v^{(k)})' = u^{(k+1)}+v^{(k+1)}$ ekanligini topamiz.

Matematik induksiya prinsipiga ko' ra $y^{(n)}=u^{(n)}+v^{(n)}$ tenglik ixtiyoriy natural n uchun o' rinli deb xulosa chiqaramiz.

2-xossa. O' zgarmas ko' paytuvchini n-tartibli hosila belgisi oldiga chiqarish mumkin: $(Cu)^{(n)}=Cu^{(n)}$.

Bu xossa ham matematik induksiya metodidan foydalanib isbotlanadi. Isbotini o' quvchilarga qoldiramiz.

Misol. $y=\dfrac{2x+3}{x^2-5x+6}$ funksiyaning n-tartibli hosilasi uchun formula keltirib chiqaring.

Yechish. Berilgan kasr-ratsional funksiyaning maxrajini ko' paytuvchilarga ajratamiz: $(x^2-5x+6)=(x-2)(x-3)$. So' ngra

$$\frac{2x+3}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \qquad (8.6)$$

tenglik o‘ rinli bo‘ ladigan A va B koeffitsientlarni izlaymiz. Bu koeffitsientlarni topish uchun tenglikning o‘ ng tomonini umumiy maxrajga keltiramiz va ikki kasrning tenglik shartidan foydalanamiz. U holda $2x+3=A(x-3)+B(x-2)$, yoki

$$2x+3=(A+B)x+(-3A-2B)$$

tenglikka ega bo‘ lamiz. Ikki ko‘ phadning tenglik shartidan (ikki ko‘ phad teng bo‘ lishi uchun o‘ zgaruvchining mos darajalari oldidagi koeffitsientlar teng bo‘ lishi zarur va yyetarli) quyidagi tenglamalar sistemasi hosil bo‘ ladi:

$$\begin{cases} A+B=2, \\ -3A-2B=3 \end{cases}$$

Bu sistemaning yechimi A=-7, B=9 ekanligini ko‘ rish qiyin emas. Topilgan natijalarni (8.1) tenglikka qo‘ yamiz va yuqorida isbotlangan xossalardan foydalanib, berilgan funksiyaning n-tartibli hosilasini kuyidagicha yozish mumkin:

$$y^{(n)}=-7\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)}+9\left(\frac{1}{x-3}\right)^{(n)} \qquad (8.7)$$

Endi $\frac{1}{x-2}$ va $\frac{1}{x-3}$ funksiyalarning n-tartibli hosilalarini topishimiz lozim. Buning uchun $u=\frac{1}{x+a}$ funksiyaning n-tartibli hosilasini bilish yyetarli. Bu funksiyani $u=(x+a)^{-1}$ ko‘ rinishda yozib, ketma-ket hosilalarni hisoblaymiz. U holda

$u'=-(x+a)^{-2}$, $u''=2(x+a)^{-3}$, $u'''=-2\cdot3(x+a)^{-3}=-6(x+a)^{-4}$.

Matematik induksiya metodi bilan

$$u^{(n)}=(-1)^n\cdot n!(x+a)^{-n-1} \qquad (8.8)$$

Shunday qilib, (8.7) va (8.8) tengliklardan foydalanib quyidagi

$$y^{(n)}=-7\cdot(-1)^n\cdot n!(x-2)^{-n-1}+9\cdot(-1)^n\cdot n!(x-3)^{-n-1}=(-1)^n\cdot n!\left(\frac{9}{(x-3)^n}-\frac{7}{(x-2)^n}\right)$$

natijaga erishamiz.

3-xossa. Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar n-tartibli hosilalarga ega bo‘ lsa, u holda bu ikki funksiya ko‘ paytmasining n -tartibli hosilasi uchun

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+C_n^{\prime}u^{(n-1)}v'+C_n^2u^{(n-2)}v''+\ldots+C_n^ku^{(n-k)}v^{(k)}+\ldots+$$
$$+C_n^{n-1}u'v^{(n-1)}+uv^{(n)} \qquad (8.9)$$

formula o‘ rinli bo‘ ladi. Bunda $C_n^k=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$.

Isboti. Matematik induksiya usulini qo‘ llaymiz. Ma’ lumki, $(uv)'=u'v+uv'$. Bu esa n=1 bo‘ lganda (8.9) formulaning to‘ g‘ riligini ko‘ rsatadi. Shuning uchun (8.9) formulani ixtiyoriy n uchun o‘ rinli deb olib, uning $n+1$ uchun ham to‘ g‘ riligini ko‘ rsatamiz. (8.9) ni differensiyalaymiz:

$$(uv)^{n+1}=u^{(n+1)}v+u^{(n)}v'+C_n^{\prime}u^{(n)}v'+C_n^{\prime}u^{(n-1)}v''+C_n^2u^{(n-1)}v''+C_n^2u^{(n-2)}v'''+$$
$$+\ldots+C_n^ku^{(n-k+1)}v^{(k)}+C_n^ku^{(n-k)}v^{(k+1)}+\ldots+C_n^{n-1}u''v^{(n-1)}+C_n^{n-1}u'v^{(n)}+$$
$$+u'v^{(n)}+uv^{(n+1)} \qquad (8.10)$$

Ushbu

$$1+C_n' = 1+n = C'_{n+1}, \quad C_n' + C_n^2 = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(n+1)n}{2} = C^2_{n+1},$$

$$C_n^{k-1} + C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n+2-k)}{(k-1)!} + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} =$$

$$= \frac{(n+1)n\ldots(n+1-(k-1))}{k!} = C_{n+1}^k$$

tengliklardan foydalanib, (8.10) ni quyidagicha yozamiz:

$$(uv)^{n+1} = u^{(n+1)}v + C^1_{n+1}u^{(n)}v' + C^2_{n+1}u^{(n-1)}v'' + \ldots + C^k_{n+1}u^{(n+1-k)}v^{(k)} + \ldots + uv^{(n+1)}$$

Xulosa:

Demak, (8.9) formula $n+1$ uchun ham o‘ rinli ekan. Isbot etilgan (8.9) formula *Leybnits formulasi* deb ataladi.

Misol. $y=x^3e^x$ ning 20-tartibli hosilasi topilsin.

Yechish. $u=e^x$ va $v=x^3$ deb olsak, Leybnits formulasiga ko‘ ra

$$y^{(20)} = x^3(e^x)^{(20)} + C^1_{20}(x^3)'(e^x)^{(19)} + C^2_{20}(x^3)''(e^x)^{(18)} + C^3_{20}(x^3)'''(e^x)^{(17)} + $$
$$+ C^4_{20}(x^3)^{(4)}(e^x)^{16} + \cdots + (x^3)^{(20)}e^x$$

bo‘ ladi. $(x^3)' = 3x^2$, $(x^3)'' = 6x$, $(x^3)''' = 6$, $(x^3)^{(4)} = 0$ tengliklarni va $y=x^3$ funksiyaning hamma keyingi hosilalarining 0 ga tengligini, shuningdek $\forall n$ uchun $(e^x)^{(n)}=e^x$ ekanligini e’ tiborga olsak,

$y^{(20)} = e^x(x^3 + 3C^1_{20}x^2 + 6C^2_{20}x + 6C^3_{20})$ tenglik hosil bo‘ ladi.

Endi koeffitsientlarni hisoblaymiz:

$$C^1_{20} = 20, \quad C^2_{20} = \frac{20\cdot 19}{2} = 190, \quad C^3_{20} = \frac{20\cdot 19\cdot 18}{3!} = \frac{20\cdot 19\cdot 18}{6} = 1140$$

Demak,

$$y^{(20)} = e^x(x^3 + 60x^2 + 1140x + 6840).$$

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Azlarov. T., Mansurov. X., Matematik analiz. T.: «O‘ zbekiston». 1 t: 1994, 2 t . 1995

2. Toshmetov O‘ . Matematik analiz. Matematik analizga kirish. T., TDPU. 2005y.

3. Hikmatov A.G‘ ., Turdiyev T. «Matematik analiz», T.1-qism.1990y.

4. Sa’ dullayev A. va boshqalar. Matematik analiz kursi misol va masalalar to`plami. T., «O‘zbekiston». 1-q. 1993., 2-q. 1995.

5. Vavilov V.V. i dr. Zadachi po matematike. Nachala analiza. M.Nauka.,1990.-608s.

6. www.ziyonet.uz