ISSN: 3030-3621
Ta'lim innovatsiyasi va integratsiyasi

НЕРАВЕНСТВО КОШИ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ.

Абдуллаева Нодира Камараддин қизи
Нукусский государственный педагогический институт имени Ажинияза

Аннотация: В этой статье подробно исследуются неравенство Коши для положительных чисел и его приложения. Огюстен Луи Коши, яркая звезда математики, великий французский учёный, родился в 1789 году в дворянской семье. В 1807 году он окончил знаменитую политехническую школу в Париже, готовящую высококвалифицированных инженеров. С 1810 года работал инженером в Шербуре. Коши занимался различными областями: теорией упругости, оптикой, небесной механикой, дифференциальными уравнениями, геометрией, алгеброй и теорией чисел. Основой интересов Коши был математический анализ. Он один из основоположников математического анализа и теории функций с комплексными переменными.

«По выдающимся достижениям во всех областях математики его можно поставить почти рядом с Гауссом», — высоко оценил он Коши. Русский математик, академик А. Д. Александров говорил, что «мысли Коши в доказательстве теоремы единственности выпуклых многочленов — одна из самых удивительных мыслей в геометрии». Огюстин Луи Коши умер в 1857 году. За свою жизнь он написал 789 научных работ, эти труды воплощены в 25 больших томах.

Сегодня методы Огюстина Луи Коши стали классическими методами.

ПРОСТЫЕ СЛУЧАИ НЕРАВЕНСТВА КОШИ

Необязательный $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, ..., a_n \geq 0$ это для цифр

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ....a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \qquad (1)$$

неравенство уместно, в этом неравенстве есть только равенство

$$a_1 = a_2 = ... = a_n$$

это будет сделано, когда будет.

Другими словами, среднее геометрическое неотрицательных чисел не превышает их среднее арифметическое, и равенство выполняется только тогда, когда эти числа равны друг другу.

Это неравенство было доказано Огюстином Луи Коши в 1821 году. Примечание: $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, ..., a_n \geq 0$ если какое-либо из чисел равно нулю, (1) левая часть неравенства обращается в ноль, и именно это

$$a_1 + a_2 + ...a_n \geq 0$$

появляется. В этом неравенстве равенство есть только

$a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$

это будет сделано, когда будет. Поэтому мы, (1) при доказательстве неравенства $a_1 > 0, a_2 > 0 ... a_n > 0$ мы думаем, что.

$n = 2,\ n = 3,\ n = 4$ Неравенство Коши легко доказывается. $n = 2$ мы рассмотрим ситуацию. В случае (1) неравенство

$\sqrt{a_1 \cdot a_2} \le \frac{a_1 + a_2}{2}$ (2) будет в форме (2) неравенство – это $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}) \ge 0$ (3) будет столь же сильным, как и неравенство.

(3) неравенство имеет значение, а равенство – только $a_1 = a_2$ известно, что это делается, когда $n = 3$ будь как будет В этом случае неравенство Коши имеет вид

$\sqrt[3]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3} \le \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$ будет в форме.

$a = \sqrt[3]{a_1},\ b = \sqrt[3]{a_2},\ c = \sqrt[3]{a_3}$ если мы укажем, ты

$$3abc \le a^3 + b^3 + c^3 \qquad (4)$$

появляется. (4) неравенство

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \ge 0$$

и разделим левую часть на множители:

$$(a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3 - 3abc \ge 0,$$

$$(a+b)^3 + c^3 - 3ab(a+b+c) \ge 0,$$

$$(a+b+c)[(a+b)^2 - (a+b)c + c^2] - 3ab(a+b+c) \ge 0,$$

$$(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) \ge 0,$$

$$\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2] \ge 0.$$

Ясно, что последнее неравенство справедливо и равенство имеет место только в том случае, если

$n = 4$ будь как будет В этом случае неравенство Коши

$$\sqrt[4]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4} \le \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \qquad (5)$$

написано как Неравенство (5) легко следует из неравенства (2):

$$\sqrt[4]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4} = \sqrt{\sqrt{a_1 \cdot a_2} \cdot \sqrt{a_3 \cdot a_4}} \le \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2}}{2} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}.$$

$n = 4$ было показано, что это уместно.

Из неравенства (1) следуют следующие важные результаты:

1-Результат. Среди неотрицательных чисел, сумма которых не меняется, те, у которых произведение наибольшее, являются четными числами.

2-Результат. Среди неотрицательных чисел, произведение которых не меняется, наименьшей суммой являются числа, равные друг другу.

Эти результаты можно использовать в задачах нахождения наибольшего и наименьшего значений.

ПЕРВЫЙ МЕТОД ДОКАЗАТЕЛЬСТВА НЕРАВЕНСТВА КАУШИ

$a_1, a_2, ... a_n$ известно, что неравенство Коши выполняется, если какое-либо из чисел равно нулю. Поэтому $a_1 > 0, a_2 > 0 ... a_n > 0$ мы думаем, что Этот

$$x_1 = \frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... a_n}}, \quad x_2 = \frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... a_n}}, \; .....x_n = \frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... a_n}}$$

после символов достаточно доказать следующее утверждение:

$x_1 \cdot x_2 \cdot ... x_n = 1$ удовлетворяющее условию $\forall \quad x_1 > 0, x_2 > 0, ... x_n > 0$ для чисел

$x_1 + x_2 + ... + x_n \geq n \quad (6)$

будет и только равенство

$x_1 = 1, x_2 = 1, ..., x_n = 1$

это будет сделано, когда будет.

Последнее утверждение докажем методом математической индукции.

$n = 2$ его реализация была показана выше.

$n = k$ принимая это за правду, $n = k + 1$ мы показываем, что это правда, даже когда Этот

$$x_1 \cdot x_2 \cdot .... \cdot x_k \cdot x_{k+1} = 1 \qquad (7)$$

среди умножений в левой части уравнения есть два таких, что первое не больше 1, а второе не меньше 1. Если эта идея не будет реализована, то ясно, что равенство (7) не будет выполнено. Для удобства назовем его $x_1 \leq 1, x_2 \geq 1$.

В таком случае

$(1 - x_1)(x_2 - 1) \geq 0,$

$x_2 - 1 - x_1 x_2 + x_1 \geq 0$

$$x_1 + x_2 \geq 1 + x_1 x_2 \qquad (8)$$

будет. Этот

$x_1 x_2, x_3, x_4, ..., x_k, x_{k+1}$

Поскольку произведение k чисел равно 1, по предположению индукции

$$x_1 x_2 + x_3 + ... + x_{k+1} \geq k \qquad (9)$$

это будет одинаково уместно. Из (8) и (9) следует следующая оценка:

$(x_1 + x_2) + x_3 + ... + x_{k+1} \geq (1 + x_1 x_2) + x_3 + ... + x_{k+1} \geq k + 1$

Часть приведенного утверждения доказана.

Если в неравенстве (6) выполнено равенство, $x_1, x_2, ..., x_n$ если среди чисел есть число, отличное от 1, так как произведение этих чисел равно 1, то находятся

два таких числа (скажем x_1 va x_2), $x_1 < 1, x_2 > 1$

$$x_1 + x_2 > 1 + x_1x_2 \Rightarrow n = x_1 + x_2 + ... + x_n > 1 + x_1x_2 + x_3 + ... + x_n \geq 1 + (n-1) = n$$

возник конфликт. Так $x_1 \cdot x_2 \cdot ....x_n = 1$ shartni qanoatlantiruvchi $\forall \quad x_1 > 0, x_2 > 0, ...x_n > 0$

для чисел

$x_1 + x_2 + ... + x_n \geq n$ (6)

Возвращаясь к нашему определению:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ....a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \qquad (1)$$

отсюда следует, что неравенство уместно.

ВТОРОЙ МЕТОД ДОКАЗАТЕЛЬСТВА НЕРАВЕНСТВА КАУШИ

$a_1, a_2, ..., a_n$ если какое-либо из чисел равно нулю, то очевидно, что неравенство Коши выполнено. Поэтому $a_1 > 0, a_2 > 0 .. a_n > 0$ мы думаем, что Этот

$$x_1 = \frac{a_1}{\frac{a_1 + a_2 + ...a_n}{n}}, \quad x_2 = \frac{a_2}{\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}}, \quad ....., x_n = \frac{a_n}{\frac{a_1 + a_2 + ...a_n}{n}}$$

после обозначений достаточно доказать следующее утверждение: $x_1 + x_2 + ... + x_n = n$ удовлетворяющее условию $\forall \quad x_1 > 0, x_2 > 0 ....., x_n > 0$ для чисел $x_1 \cdot x_2 \cdot .... \cdot x_n \leq 1$ (10)

будет и только равенство $x_1 = 1, x_2 = 1, ..., x_n = 1$ это будет сделано, когда будет.

Докажем это положение методом математической индукции:

$n = 2$ мы показали ранее, что оно выполняется, когда

$n = k$ принимая это за правду, $n = k + 1$ мы показываем, что это правда, даже когда .

Этот $x_1 + x_2 + ... + x_{k+1} = k + 1$ (11)

среди слагаемых в левой части равенства есть два таких, что первое не меньше 1, а второе не меньше 1. Известно, что уравнение (11) не выполняется, если не реализована идея. Для удобства $x_1 \leq 1, x_2 \geq 1$ мы можем сказать В таком случае

$(1 - x_1)(x_2 - 1) \geq 0,$

$x_2 - 1 - x_1x_2 + x_1 \geq 0$

$x_1 + x_2 - 1 \geq x_1x_2$ (12)

будет. Этот

$x_1 + x_2 - 1,\ x_3,\ x_4, \ldots\ldots, x_k,\ x_{k+1}$

по предположению индукции, поскольку сумма ta равна

$$(x_1 + x_2 - 1) \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot \ldots\ldots \cdot x_k \cdot x_{k+1} \le 1 \qquad (13)$$

неравенство будет уместным. Неравенства (12) и (13) приводят к следующей оценке:

$$(x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 \cdot \ldots\ldots \cdot x_{k+1} \le (x_1 + x_2 - 1) \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot \ldots\ldots \cdot x_{k+1} \le 1 .$$

Первая часть предыдущего утверждения доказана.

Если в неравенстве (10) выполнено равенство, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ если между числами есть разница на единицу, так как это сумма чисел, то таких чисел два (скажем x_1 *va* x_2), $x_1 < 1,\ x_2 > 1$ будет.

Из этого

$$(x_1 + x_2 - 1) > 1,$$

$$1 = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 \ldots\ldots \cdot x_n < (x_1 + x_2 - 1) \cdot x_3 \cdot \ldots\ldots \cdot x_n \le 1$$

возникает конфликт.

Значит, наша гипотеза верна. Это наше предположение

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \ldots. + a_n}{n}$$

неравенство придет.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА:

1. Хасанов А.Б., Яхасмуротов А.Б. «Неравенство Коши и его приложения» Ургенч-2003.
2. Мирзаахмедов М.А., Сотиболдиев Д.А. «Подготовка школьников к математическим олимпиадам» Ташкент-1993г.
3. Азларов Т, Мансуров Х "Математический анализ" Часть 1 Тош: 1994г.
4. Назаров Х, Остонов К «История математики» Ташкент-1996.
5. Тохиров.А, Моминов.Ф "Задачи математической олимпиады" Тош: 1996г.
6. Минаматов, Ю. (2021). УМНЫЕ УСТРОЙСТВА I ПРОЦЕССЫ V IX ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА. Евразийский журнал академических исследований, 1(9), 875-879.
7. Бабанский Б.К. Методы обучение в современной общеобразовательной школе. М, 1985.
8. Бержанов Қ, Мусин С. Педагогика тарихы. Алматы, Мектеп, 1989.
9. Выбор методов обучение в средней школе. Под. ред. Б.К.Бабанского. М, 1984.
10. Крупскае Н.К. Методические заметки. Пед.соч. в 10-ти том. 3-том, стр 557.