ISSN: 3030-3621

STEFFENSEN (EYTKEN-STEFFENSEN) USULI

Muhammademinov Alijon Azizjon o'g'li
Andijon davlat universiteti talabasi
Saidova Nigora Komiljonovna
Andijon davlat universiteti katta o'qituvchisi

Annotatsiya: Har xil obyektlarni modellar yordamida tadqiq qilishning koʻpgina masalalari chiziqli boʻlmagan tenglamalarni yechishga olib kelinadi. Xususan, elektron, radioelektron va hisoblash texnikasi qurilmalarini tadqiq qilishda, tebranishlar nazariyasi, suyuqlik va gaz mexanikasi, kimyo-texnologiya va boshqa sohalar masalalarini modellar yordamida yechishda ana shunday amliy masala yuzaga keladi. Shu kabi masalalarni yechish yoʻllaridan biri bu Steffensen usuli va bu usul yordamida bi qancha masalalar yechilib hayotga tadbiq etilmoqda.

Kalit soʻzlar: Steffensen usuli, iteratsiya, Eytken tezlatgichi, qatorlar, Teylor qatori.

Urinmalar usulining yaqinlashish tezligini oshirish uchun quyidagi ifodadan foydalalanish lozim:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{x_{n+1}-x_n} \qquad (1.1)$$

va bu formulani oʻng ayirmali approksimatsiya deb qarashimiz mumkin.

Yuqoridagi ifodadan koʻrinadiki, unda hali x_{n+1} noma'lum had qatnashmoqda uni hisoblash uchun oddiy iteratsiyadn foydalanamiz:

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n + f(x_n).$$

Natijada quyidagi approksimatsiyaga ega boʻlamiz:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}{f(x_n)}$$

Bu ifodadan Nyuton usulida foydalanish bilan yangi iteratsion algoritmga ega boʻlamiz:

$$x_{n+1} \approx x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n+f(x_n))-f(x_n)} f(x_n) \qquad (1.2)$$

Bu iteratsion algoritm sonli usullarda *Steffensen usuli* deb ataladi. Steffensen usuli kvadratik yaqinlashishga ega, ammo bu yerda qoʻshimcha ravishda $f(x_n + f(x_n))$ ifodaning qiymatini hisoblash hisobiga yuqori yaqinlashish tezligiga erishiladi. Bu usul har bir iteratsiyada funksiyaning qiymatini ikki marta hisoblashni talab qiladi, bu jihatdan Steffensen usuli kesuvchilar usuliga qarahanda kamroq samara beradi.

Yuqoridagi iteratsion algoritmni Eytken tomoni-dan taklif etilgan chiziqli yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning yaqinlashishini tezlashtirish uslubidan ham olish mumkin.

Buning uchun quyidagi ketma-ketlikni qaraylik:

$$zn = z + Cqn. \qquad (1.3)$$

Bu ketma-ketlik $|q|<1$ da z limitga yaqinlashadi. Uncha qiyin bo‘lmagan akslantirishlar yordamida z limitik qiymatni $\{zn\}$ ketma-ketlikning uchta zn-1, zn va $zn+1$ ketma-ket elementlari orqali ifodalash mumkin. Buning uchun bizga ko‘rinib turgan $\frac{z_n - z}{z_{n-1} - z} = q$ va $\frac{z_{n+1} - z}{z_n - z} = q$ ikkita tenglikdan ushbu $(z_{n+1} - z)(z_{n-1} - z) = (z_n - z)^2$ tenglikka kelinadi. Bu yerdan esa o‘z navbatida z ning quyidagi ifodasi kelib chiqadi:

$$z = \frac{z_{n+1} z_{n-1} - {z_n}^2}{z_{n+1} - 2z_n + z_{n-1}}.$$

Bu natijaga asoslanib, $\{zn\}$ ketma-ketlikni boshqa ketma-ketlikka almashtirishning quyidagi Eytken taklifini qaraylik:

$$\xi_{n+1} = \frac{z_{n+1} z_{n-1} - {z_n}^2}{z_{n+1} - 2z_n + z_{n-1}} \qquad (1.4)$$

Agar bu almashtirishni (1.3) ko‘rinishdagi ixtiyoriy ketma-ketlikka qo‘llasak, u holda n ning ixtiyoriy qiymatida $\xi_n = z = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning yaqinlashish turi (1.3) nikiga yaqin bo‘lsa, u holda (1.4) almashtirish (n ning ixtiyoriy qiymatida uning qiymatini bermasada) z ga ga daslabkisiga nisbatan tezroq yaqinlashuvchi yangi ketma-ketlikni beradi.

1-misol. Ushbu

$$x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$$

Tenglamaning ikki karrali $x_r = 2$ ildiziga taqribiy yaqinlashishni Nyuton usuli va unga Eytken tezlatkichini qo‘llash bilan bajaring.

Yechish. Hisoblashlar natijalari mos ketma-ketliklar elementlari bilan quyidagi jadvalda keltirilgan (uchinchi va to‘rtinchi ustunlarga qarang).

n	x_n	$\lvert x_n - x_r \rvert / \lvert x_{n-1} - x_r \rvert$	ξ_n	$\lvert \xi_n - x_r \rvert / \lvert \xi_{n-1} - x_r \rvert$
0	0.5	-	-	-
1	1.454545	0.363636	-	-
2	1.745059	0.467391	1.872159	-
3	1.876049	0.486197	1.983607	0.128232
4	1.938822	0.493563	1.996588	0.208141
5	1.969602	0.496884	1.999213	0.230676
6	1.984847	0.498466	1.999811	0.240656
7	1.992435	0.499239	1.999954	0.245400
8	1.996221	0.499621	1.999988	0.247717
9	1.998111	0.499811	1.999997	0.248863
10	1.999056	0.499905	1.999999	0.249432
11	1.999528	0.499953	2.000000	0.249717
12	1.999764	0.499976	2.000000	0.249856
13	1.999882	0.499988	2.000000	0.249948
14	1.999941	0.499994	2.000000	0.250448

Bu jadvalning uchinchi ustunida yaqinlashish tezligi $\alpha = 1$ deb faraz qilinib, (1.3) tenglikdagi C o‘zgarmasnig har bir iteratsiyadagi qiymatlari keltirilgan. Jadvaldagi natijalardan ko‘rinadiki, C o‘zgarmas iteratsion jarayonda juda kam o‘zgarib boradi va u C=0,5 qiymatga juda ham yaqin. Natijada Nyuton usulining karrali ildizga yaqinlashish tezligi chiziqli ekanligi haqida faraz isbotlanadi.

Chiziqli yaqinlashuvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlikni tezlashtirivchi formulaga qo‘llab, jadvalning to‘rtinchi ustunidagi ξ_n larning qiymatlariga erishamiz. Jadvalning ikkinchi va tortinchi ustunlaridagi qiymatlarni taqqoslash bilan yaqinlashish tezligiga erishganligimizga ishonch hosil qilamiz. Haqiqatan ham, Nyuton usulining o‘n to‘rtinchi iteratsiyasida erishiladigan natijaga Nyuton usuli va Eytken tezlatgichini qo‘llab, uning yettinchi iteratsiyasida shu natijaga kelish mumkinligini ko‘rish mumkin. Bu jadvalning beshinchi ustunidagi natijalar yaqinlashish tezligi ko‘rsatgichi α□□ning oshishi hisobiga emas, balki C o‘zgarmasni 0,25 gacha kamaytirish hisobiga bunday samarali natijaga erishilganligini ko‘rsatadi.

Endi oddiy iteratsiya usulida ildizga taqribiy yaqinlashishning tezligini oshirishni tahlil qilaylik. Buning uchun avvalo $x_{n+1} = g(x_n)$ iteratsion formulaning o‘ng tarafini Teylor qatoriga yoyaylik, ya’ni

$$g(x_n) = g(x_r + (x_n - x_r)) = x_r + g'(x_r)\,(x_n - x_r) + O((x_n - x_r)^2),$$

Bunga ko‘ra

$$x_{n+1} - x_r = g'(x_r)\,(x_n - x_r) + O((x_n - x_r)^2).$$

Shunday qilib, $e_n = x_n - x_r$ kvadrat aniqlik bilan har bir iteratsiya uchun quyidagi taqribiy tenglikni yozish mumkin:

$$x_{n+1} - x_r = g'(x_r)\,(x_n - x_r).$$

Bu yerda $\{x_n\}$ ketma-ketlikni quyidagi formula bilan ifodalash mumkin:

$$x_n = x_r + [\,g'(x_r)]^n\,(x_0 - x_r)$$

Bu ketma-ketlikning ham yaqinlashishi turi (2.3) ketma-ketlikniki kabi. Demak, oddiy iteratsiyadagi ildizga yaqinlashish ketma-ketligi yaqinlashishni tezlashtirish protsedurasini qo‘llash uchun mos ekan.

Yaqinlashishni tezlashtirish protsedurasini qo‘llashda hisoblangan har bir yaxshilovchi qiymatning keyingi hisoblashlarda ham hisobga olinishini ta’minlash maqsadida uni shu zahoti hisobga kiritish lozim. Bu iteratsiyaning har bir qadamida quyidagicha bajariladi: Faraz qilaylik, hisoblashlar x_n ning qiymatini hisoblashgacha bajariladi; uning yordamida ikkita yordamchi $x_n^{(1)} = g(x_n)$ va $x_n^{(2)} = g(g(x_n))$ qiymatlarni hisoblaymiz. Uchta x, $x_n^{(1)}$va $x_n^{(2)}$ qiymatlarga (1.4) tezlatgich formulani qo‘llaymiz va uning natijasini navbatdagi x_{n+1} yaqinlashish deb qabul qilamiz:

$$x_{n+1} = \frac{x_n g(g(x_n)) - g^2(x_n)}{g(g(x_n)) - 2g(x_n) + x_n}. \qquad (1.5)$$

Bu tenglik (1.2) Steffensen iteratsion formulasining yozilish shakllaridan biri ekanligi ko‘rinib turibdi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Shavkat Mirziyoyev “Inson Manfaatlari va Mustaqillik - Kelajakni Boshqarishning Asosiy Yo‘nalishlari” 2018-yil 236 b.
2. Isroilov M. “Hisoblash metodlari”, T., "O`zbekiston", 2003
3. Shoxamidov Sh.Sh. “Amaliy matematika unsurlari”, T., “O`zbekiston”, 1997
4. Boyzoqov A., Qayumov Sh. “Hisoblash matematikasi asoslari”, O`quv qo`llanma. Toshkent 2000.
5. Abduqodirov A.A. “Hisoblash matematikasi va programmalash”, Toshkent. “O`qituvchi” 1989.
6. Vorob`eva G.N. i dr. “Praktikum po vichislitel’noy matematike” M. VSh. 1990.
7. Abduhamidov A., Xudoynazarov S. “Hisoblash usullaridan mashqlar va laboratoriya ishlari”, T.1995.
8. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad, Mathlab, Maple (Самоучитель). – М.: НТ Пресс, 2006. – 496 с.
9. Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченова Н. В. Вычислительные методы. - М.: Издательский дом МЭИ, 2008. - 672 с.