FUNKSIYA HOSILASI

Sabirov Boburjon Ravshanbek og'li
Ish joyi: Xorazm viloyati Bog'ot tumani 2-son kasb-hunar maktabi Matematika fani o'qituvchisi
Tel nomer: 97 607 09 98
AB 238 37 59
sabirovboburjon73@gmail.com
Abdullayev Mardonbek Bozorovich
Ish joyi: Xorazm viloyati Bog'ot tumani 2-son kasb-hunar maktabi Matematika fani o'qituvchisi
Tel nomer: 93 061 48 24
AA 823 76 33
mardonabdullayev1997@gmail.com

Annotatsiya: Maqolada Hosila tushunchasiga olib keladigan masalalar jumlasiga qattiq jismni to`g`ri chiziqli harakatini, yuqoriga vertikal holda otilgan jismning harakatini yoki dvigatel silindridagi porshen harakatini tekshirish kabi masalalarda foydalanishning ahamiyati xususida fikrlar berilgan.

Kalit so'zlari: harakat tezligi masalasi, funksiya orttirmasi, argument orttirmasi, hosila, differensiallash, asosiy differensiallash formulalari, yig`indi, ayirma, ko`paytmaning hosilasi, murakkab funksiya hosilasi, hosilaning geometrik va mexanik ma'nosi.

Differensial hisob – matematikaning hosilalar va differensiallarni hisoblash, ularning xossalarini o`rganish hamda funksiyalarni tekshirishga tatbiq qilish bilan shug`ullanadigan bo`limi.

Differensial hisobning vujudga kelishidagi dastlabki ishlar egri chiziqqa urinma o`tkazish masalasini echishda Ferma, Dekart va boshqa matematiklar tomonidan qilingan. I.Nyuton va G.Leybnits o'zlaridan avvalgi matematiklarning bu boradagi ishlarini nihoyasiga yetkazdilar.

1. Funksiya hosilasi, uning geometrik va mexanik ma'nosi

Hosila tushunchasiga olib keladigan masalalar. Hosila tushunchasiga olib keladigan masalalar jumlasiga qattiq jismni to`g`ri chiziqli harakatini, yuqoriga vertikal holda otilgan jismning harakatini yoki dvigatel silindridagi porshen harakatini tekshirish kabi masalalarni kiritish mumkin. Bunday harakatlarni tekshirganda jismning konkret o`lchamlarini va shaklini e'tiborga olmay, uni harakat qiluvchi moddiy nuqta shaklida tasavvur qilamiz. Biz bitta masalani olib qaraymiz.

Harakat tezligi masalasi. Aytaylik, M moddiy nuqtaning to`g`ri chiziqli harakat qonuniga ko`ra uning $t=t_0$ paytdagi tezligini (oniy tezligini) topish talab qilinsin. Nuqtaning $t_0$ *va* $t_0+\Delta t$ $(\Delta t \neq 0)$ vaqtlar orasidagi bosib o`tgan yo`li $\Delta S = f(t_0+\Delta t) - f(t_0)$ bo`ladi. Uning shu vaqtdagi o`rtacha tezligi $\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{f(t_0+\Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$ ga teng.

Ma'lumki, Δt qanchalik kichik bo`lsa, $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ o'rtacha tezlik nuqtaning $t_0$ paytdagi tezligiga shunchalik yaqin bo`ladi. Shuning uchun nuqtaning t_0 paytdagi tezligi quyidagi limitdan iborat. $V(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$

Fuksiya hosilasi.

y=f(x) funksiya *(a,b)* intervalda aniqlangan bo`lsin, *(a,b)* intervalga tegishli x_0 va $x_0+\Delta x$ nuqtalarni olamiz.

Argument biror (musbat yoki manfiy - bari bir) Δx orttirmasini olsin, u vaqtda *y* funksiya biror Δy orttirmani oladi. Shunday qilib argumentning x_0 qiymatida $y_0=f(x_0)$ ga, argumentning $x_0+\Delta x$ qiymatda $y_0+\Delta y = f(x_0+\Delta x)$ ga ega bo`lamiz. Funksiya orttirmasi Δy ni topamiz

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \qquad (1)$$

Funksiya orttirmasini argument orttirmasiga nisbatini tuzamiz.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (2)$$

Bu – nisbatning $\Delta x \to 0$ dagi limitini topamiz.

Agar bu limit mavjud bo`lsa, u berilgan *f(x)* funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deyiladi va $f'(x_0)$ bilan belgilanadi. Shunday qilib,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{yoki} \quad f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (3)$$

Ta'rif. Berilgan *y=f(x)* funksiyaning argument *x* bo`yicha hosilasi deb, argument orttirmasi Δx ixtiyoriy ravishda nolga intilganda funksiya orttirmasi Δy ning argument orttirmasi Δx ga nisbatining limitiga aytiladi.

Umumiy holda x ning har bir qiymati uchun $f'(x)$ hosila ma'lum qiymatga ega, ya'ni hosila ham x ning funksiyasi bo`lishini qayd qilamiz. Hosilada $f'(x)$ belgi bilan birga boshqacha belgilar ham ishlatiladi. $y';\ y'_x;\ \frac{dy}{dx}$

Hosilaning $x=a$ dagi konkret qiymati $f'(a)$ yoki $y'\big|_{x=a}$ bilan belgilanadi.
Funksiya hosilasini hosila ta'rifiga ko`ra hisoblashni ko`ramiz.

Misol: $y=x^2$ funksiya berilgan, uning:
1) ixtiyoriy x nuqtadagi va 2) $x=5$ nuqtadagi hosilasi y' topilsin.
Yechish:

1) argumentning x ga teng qiymatida $y=x^2$ ga teng. Argument $x+\Delta x$ qiymatida $y+\Delta y=(x+\Delta x)^2$ ga ega bo`lamiz.

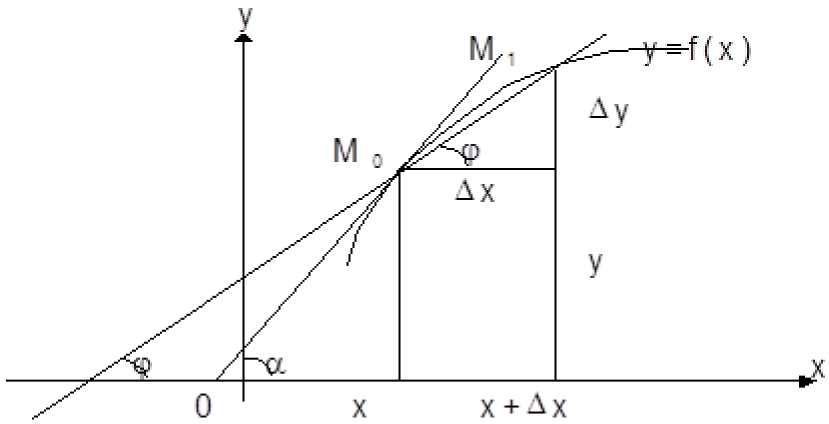
$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=2x(\Delta x)+(x)^2,$ $\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatni tuzamiz.

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x+\Delta x(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x+\Delta x$ Limitga o'tib, berilgan funksiyadan hosila topamiz. $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$

Demak, $y=x^2$ funksiyaning ixtiyoriy nuqtadagi hosilasi $y'=2x$ $\quad x=5$ da $y'\big|_{x=5}=2\cdot 5=10$

Hosilaning geometrik va mexanik ma'nosi. Harakat qiluvchi jismning tezligini tekshirish natijasida, ya'ni mexanik tasavvurlardan chiqib borib, hosila tushunchasiga keldik. Endi hosilaning *geometrik ma'nosini* beramiz.

Bizga berilgan $y=f(x)$ funksiya x nuqta va uning atrofida aniqlangan bo`lsin. Argument $x$ ning biror qiymatida $y=f(x)$ funksiya aniq qiymatga ega bo`ladi, biz uni $M_0(x_0;\ y_0)$ deb belgilaylik. Argumentga Dx orttirma beramiz va natija funksiyaning y+Dy=f(x+Dx) orttirilgan qiymati to`g`ri keladi. Bu nuqtani M_1(x+Dx, y+Dy) deb belgilaymiz va M_0 kesuvchi o`tkazib uning *OX* o`qining musbat yo`nalishi bilan tashkil etgan burchagini *j* bilan belgilaymiz.



Endi $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatni qaraymiz. Rasmdan ko`rinadiki, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\varphi$ ga teng.

Agar D*x*®0 ga, u holda M_1 nuqta egri chiziq bo`yicha harakatlanib, $M_0$ nuqtaga yaqinlasha boradi. $M_0M_1$ kesuvchi ham D*x*®0 da o`z holatini o`zgartira boradi, xususan *j* burchak ham o`zgaradi va natijada *j* burchak *a* burchakka intiladi. M_0M_1 kesuvchi esa M_0 nuqtadan o`tuvchi urinma holatiga intiladi. Urinmaning burchak koeffitsienti quyidagicha topiladi

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Demak, $f'(x) = tg\alpha$, ya'ni, argument *x* ning berilgan qiymatida $f'(x)$ hosilaning qiymati *f*(*x*) funksiyaning grafigiga uning $M_0(x_0;y_0)$ nuqtasidagi urinmaning *OX* o`qining musbat yo`nalishi bilan hosil qilgan burchak tangensiga, ya'ni burchak *koeffitsiyentiga* teng.

Hosilaning *mexanik ma`nosi tezlikni bildiradi*, ya'ni moddiy nuqtaning *t* vaqt ichidagi S masofani bosish uchun harakatdagi tezligini topishdan iborat.

2. Differensiallash, uning asosiy qoidalari va formulalari

Berilgan *f(x)* funksiyadan hosila topish amali shu funksiyani differensiallash deyiladi.

Differensiallashning asosiy qoidalari

1. O`zgarmas miqdorning hosilasi nolga teng, ya'ni agar *y=c* bo`lsa(*c=const)* *y'=0* bo`ladi.

2. O'zgarmas ko`paytuvchini hosila ishorasidan tashqariga chiqarish mumkin: *y=cu(x)* bo`lsa *y'=cu'(x)* bo`ladi.

3.Chekli sondagi differensiallanuvchi funksiyalar yig`indisining hosilasi shu funksiyalar hosilalarining yig`indisiga teng:

$$y = U(x) + V(x) + W(x); \quad y' = U'(x) + V'(x) + W'(x)$$

4. Ikkita differensiallanuvchi funksiyalar ko`paytmasining hosilasi birinchi funksiya hosilasining ikkinchi funksiya bilan ko`paytmasi hamda birinchi funksiyaning ikkinchi funksiya hosilasi bilan ko`paytmasining yig`indisiga teng:

$y=u\vartheta$ bo`lsa $y'=u'\vartheta+u\vartheta'$.

5. Ikkita differensiallanuvchi funksiyalar bo`linmasining hosilasi (kasrda ifodalanib) bo`linuvchi funksiya hosilasini bo`luvchi funksiya bilan ko`paytmasi hamda bo`linuvchi funksiyani bo`luvchi funksiya hosilasi bilan ko`paytmasining ayirmasini bo`luvchi (maxrajdagi) funksiya kvadratining nisbatiga teng:

$y=\frac{u}{\vartheta}$ bo`lsa $y'=\frac{u'\vartheta-u\vartheta'}{\vartheta^2}$

6. Aytaylik, *y=F(u)* murakkab funksiya bo`lsin, ya'ni *y=F(u)*, $u=\varphi(x)$ yoki $y=F[\varphi(x)]$, *u* – o`zgaruvchi, oraliq argumenti deyiladi. *y=F(u)* va $u=\varphi(x)$ differensiallanuvchi funksiyalar bo`lsin.

Murakkab funksiyaning differensiallash qoidasini keltirib chiqaramiz.

Teorema: Murakkab *F(u)* funksiyaning erkli o`zgaruvchi *x* bo`yicha hosilasi bu funksiya oraliq argumenti bo`yicha hosilasini oraliq argumentining erkli o`zgaruvchi *x* bo`yicha hosilasining ko`paytmasiga teng, ya'ni

$$y'_x=F'_u(u)\cdot u'_x(x)$$

Misol: $y=(x^5+4x^4+3x^2+2)^5$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish: berilgan funksiyani murakkab funksiya deb qaraymiz ya'ni $y=u^5;\quad u=x^5+4x^4+3x^2+2$ (1) formulaga asosan

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=\left((x^5+4x^4+3x^2+2)^5\right)'=5(x^5+4x^4+3x^2+2)^4\cdot(5x^4+16x^3+6x)$$

Differensiallashning asosiy formulalari jadvali

1) y=const ; $y'=0$ 2) $y=x^{\alpha};\quad y=\alpha x^{\alpha-1}$

3) $y=\sqrt{x};\ y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 4) $y=\frac{1}{x};\quad y=-\frac{1}{x^2}$

5) $y=a^x;\ y'=a^x\ln a$ 6) $y=e^x;\quad y'=e^x$

7) $y=\log_a x;\quad y'=\frac{1}{x}\log_a e$ 8) $y=\ln x;\quad y'=\frac{1}{x}$

9) $y=\sin x;\quad y'=\cos x$ 10) $y=\cos x;\quad y'=-\sin x$

11) $y = tgx$; $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$ 12) $y = ctgx$; $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Misollar.

1) $f(x) = (x^3 + 4x + 7)^4$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish: bu yerda $y(u) = u^4$ va $u(x) = x^3 + 4x + 7$. U holda

$f(x) = (u^4)' \cdot (x^3 + 4x + 7)' = 4u^3(3x^2 + 4) = 4(x^3 + 4x + 7)^3(3x^2 + 4)$

2) $(x^2 + x)' = (x^2)' + (x)' = 2x + 1$

$(2x\sin x)' = (2x)'\sin x + 2x(\sin x)' = 2(x)'\sin x + 2x\cos x =$

3) $2\sin x + 2x\cos x = 2(\sin x + x\cos x)$

4) $y = \sin 3x$; y' – ? $y' = (\sin 3x)' = 3\cos 3x$

5) $y = ctg2x$ $y' = (ctg2x)' = (-\frac{1}{\sin^2 2x}) \cdot 2 = -\frac{2}{\sin^2 2x}$

Foydalanilgan adabiyotlar

1. N.P. Antonov, M.Ya. Vigodskiy, V.V. Nikitin, A.I. Sankin.
2. Elementar matematika masalalari to‘plami. T., «Ocqituvchi», 1975- y.
3. M.A. Mirzaaxmedov, D. Sotiboldiyev. O‘quvchilarni matematik
4. olimpiadalarga tayyorlash. T., «O‘qituvchi», 1993- y.
5. I.S. Petrakov. M atematika to'garaklari, 9—11 sinflar. T,
6. «O‘qituvchi», 1991-y.