ISSN: 3030-3621

INTERPOLYATSION KUBIK SPLAYNLARNI QURISH

Andijon davlat universiteti talabasi
Muhammademinov Alijon Azizjon o'g'li

Annotatsiya: Splayn funksiyalari texnika, hisob-kitob va boshqa sohalarda keng qo'llaniladi. Masalan, ma'lumotlar tahlilida, splayn funksiyalari o'zaro aloqador to'g'ridan-to'g'ri taqsimlangan nuqtaga oid ma'lumotlarni aniqlashda yordam beradi. Tasavvur qiling, sizning ko'rganingiz grafikdagi nuqta to'g'ridan-to'g'ri belgilangan oraliqda yo'q, ammo siz uni chiziqlik va tortishli jipslar yordamida topolmayotganingizni o'ylang. Bu holatda, splayn funksiyalari yordamida aniqlash imkoniyati mavjud. Matematikada, qandaydir funksiyani aniqlashda, biz "nuqta to'plami" yoki "ma'lumot to'plami"ni ko'rsatamiz. Splayn funksiyalari, ma'lumot to'plamini chiziqlik yoki tortishli jipslar yordamida interpolatsiya qilish yordamida aniqlashni o'z ichiga oladi.

Kalit so'zlar: interpolyatsiya, kubik splayn, nuqta to'plami, splayn funksiyalar, interpolyatsion ko'phad.

Ta'rif. Quyidagi to'rt shartni qanoatlantiruvchi ushbu $S(f,x) = S_3(f,x,\Delta_n)$ funksiya *interpolyatsion kubik splayn* deyiladi:

1. Har bir $x_i\ ,x_{i+1}\ (i = \overline{0,n})$ oraliqda $S(f,x) \in H_3(P)$;
2. $\mathrm{S}(f,x) \in C^2[a,b]$;
3. To'rning $x_k(k = \overline{0,n})$ tugunlarida $S(f,x_k) = f_k$ tenglik o'rinli;
4. $S_3''(f,x)$ uchun

$$S''(f,a) = S''(f,b) = 0$$

chegaraviy shartlar bajariladi. Bu to'rt shartni qanoatlantiruvchi yagona $\mathrm{S}(f,x)$ splayn mavjudligini ko'rsatamiz. Buning uchun avval quyidagi yordamchi faktlarni keltiramiz.

Lemma. Faraz qilaylik, $A = [a_{ij}]$ n-tartibli kvadrat matritsaning elementlari

$$\min_{1\leq i\leq n} \{|a_{ii}| - \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\} = q > 0 \qquad (1.2)$$

shartni qanoatlantirsin. U holda $A\overline{x} = \overline{b}$ sistema yagona yechimga ega bo'lib, uning yechimi

$$\max_{1\leq k\leq n} |x_k| \leq q^{-1} \max_{1\leq k\leq n} |b_k| \qquad (1.3)$$

Tengsizlikni qanoatlantiradi

Isbot. Agar $A\overline{x} = \overline{b}$ sistemaning ozod hadlari nolga teng bo‘lsa, u holda (2.3) tengsizlikdan bu sistemaning faqat trivial yechimga ega ekanligi, demak, det. $A \neq 0$ bo‘lishi va bu sistemaning ixtiyoriy ozod hadlar uchun yagona yechimga egaligi kelib chiqadi. Shuning uchun ham, lemmani isbot qilish uchun (2.3) tengsizlikni keltirib chiqarish kifoyadir. Faraz qilaylik, (2.2) shart bajarilsin va

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| = x_k{}'$$

Bo’lsin. U holda

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

Ekanligidan

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |b_i| \geqslant |a_{kk}||x_k| - \sum_{j \neq k} |a_{kj}||x_k| =$$
$$= \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \{ |a_{kk}| - \sum_{j \neq k} |a_{kj}| \} \geqslant q \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$$

bo‘ladi. Shu bilan (2.3) tengsizlik va demak lemma isbotlandi.

Agar matritsaning elementlari (2.2) shartni qanoatlantirsa, bunday *matritsa salmoqli bosh diagonalga* ega deyiladi.

Endi splaynni qurish bilan shug‘ullanamiz, $S(f, x)$ ning ikkinchi hosilasi to‘rning har bir $[x_{i-1}, x_i]$ oralig‘ida uzluksiz bo‘lganligi tufayli $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ da ushbu

$$S''(f, x) = M_{i-1} \frac{x_i - x}{h_i} + M_i \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \qquad (1.4)$$

tenglikni yoza olamiz. Bu yerda va $h_i = x_i - x_{i-1}$ va $M_i = S''(f, x_i)$. Bu tenglikning har ikki tomonini integrallab quyidagiga ega bo‘lamiz:

(1.5)

$$S(f, x) = M_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + A_i \frac{x_i - x}{h_i} +$$
$$+ B_i \frac{x - x_{i-1}}{h_i},$$

Bunda A_i va B_i integrallash doimiylari bo’lib , ular $S(f, x_{i-1}) = f_{i-1}$ va $S(f, x_i) = f_i$ shartlardan aniqlanadi. (2.5) da $x = x_{i-1}$, $x = x_i$ larni o’rniga qo’yib mos ravishda

$$M_{i-1}\frac{h_i^2}{6}+A_i=f_{i-1}$$

Va

$$M_i\frac{h_i^2}{6}+B_i=f_i$$

larni hosil qilamiz. Bunda A_i va B_i larni topib (2.4) ga qo'ysak natijada

$$S(f,x)=M_{i-1}\frac{(x_i-x)^3}{6h_i}+M_i\frac{(x-x_{i-1})^3}{6h_i}+ \\ +\left(f_{i-1}-\frac{M_{i-1}h_i^2}{6}\right)\frac{x_i-x}{h_i}+\left(f_i-\frac{M_ih_i^2}{6}\right)\frac{x-x_{i-1}}{h_i}, \quad (1.6)$$

$$S'(f,x)=-M_{i-1}\frac{(x_i-x)^2}{2h_i}+M_i\frac{(x-x_{i-1})^2}{2h_i}+\frac{f-f_{i-1}}{h_i}- \\ -\frac{M_i-M_{i-1}}{6}h_i \quad (1.7)$$

larga ega bo'lamiz. Oxirgi tenglik $[x_i, x_{i+1}]$ oraliq uchun quyidagi ko'rinishga ega:

$$S'(f,x)=-M_i\frac{(x_{i+1}-x)^2}{2h_{i+1}}+M_{i+1}\frac{(x-x_i)^2}{2h_{i+1}}+\frac{f_{i+1}-f_i}{h_{i+1}}- \\ -\frac{M_{i+1}-M_i}{6}h_{i+1}. \quad (1.8)$$

Endi (2.7) da x ning x_i ga chapdan va (2.8) da x ning x_i ga o'ngdan intilgandagi, ya'ni $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ lar uchun hosilaning bir tomonlama limitlarini hisoblaylik:

$$S'(x_i-0)=\frac{h_i}{6}M_{i-1}+\frac{h_i}{3}M_i-\frac{f_i-f_{i-1}}{h_i}, \\ (i=\overline{1,n-1}) \\ S'(x_i+0)=-\frac{h_{i+1}}{3}M_i-\frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1}+\frac{f_{i+1}-f_i}{h_{i+1}}.$$

Ta'rifning 2) shartiga ko'ra $S^{`}(f,x)$ va $S^{``}(f,x)$ funksiyalar *[a,b]* oraliqda uzluksiz. $S^{`}(f,x)$ ning $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ nuqtalarda uzluksizligidan foydalansak, quyidagi *n — 1* ta tenglamaga ega bo'lamiz:

$$\frac{h_i}{6}M_{i-1}+\frac{h_i+h_{i+1}}{3}M_i+\frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1}=\frac{f_{i+1}-f_i}{h_{i+1}}-\frac{f_i-f_{i-1}}{h_i}. \quad (1.9)$$

Bu tenglamalarni (2.1) chegaraviy shartdan kelib chiqadigan

$$M_0 = M_n = 0 \qquad (1.10)$$

Tenglik bilan to'ldirib

$$a_i = \frac{h_i}{6}, b_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{3}, c_i = \frac{h_{i+1}}{6}, d_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \qquad (1.11)$$

belgilashlarni kiritsak, u holda $M_1, M_2, \dots, M_{n-2}$ noma'lumlarni topish uchun

$$\left.\begin{aligned} b_1 M_1 + c_1 M_2 &= d_1, \\ a_2 M_1 + b_2 M_2 + c_2 M_3 &= d_2, \\ a_3 M_2 + b_3 M_3 + c_3 M_4 &= d_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{n-2} M_{n-3} + b_{n-2} M_{n-2} + c_{n-2} M_{n-1} &= d_{n-1}, \\ a_{n-1} M_{n-2} + b_{n-1} M_{n-1} &= d_{n-1} \end{aligned}\right\} \qquad (1.12)$$

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. (2.11) ga ko'ra (2.12) sistemaning matritsasi salmoqli bosh diagonalga ega bo'lganligi tufayli ixtiyoriy $f_1, f_2, \dots, f_n$ lar uchun (2.12) sistema yagona yechimga ega. Shunday qilib, 1) — 4) shartlarni qanoatlantiruvchi yagona splayn mavjud ekan. (2.12) sistemani yechishning juda ham effektiv algoritmi mavjud, uni quynda keltirib o'tamiz. Buning uchun barcha *k = 1 , 2, . . . , n — 1* lar uchun

$$p_k = a_k q_{k-1} + b_k \quad (q_0 = 0),$$
$$q_k = -\frac{c_k}{p_k}, \quad u_k = \frac{d_k - a_k u_{k-1}}{p_k} (u_0 = 0) \qquad (1.13)$$

yordamchi miqdorlarni hosil qilamiz. So'ngra (2.12) sistemaning 2- , . . . , (n — 1) - tenglamalaridan ketma-ket $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$ larni yo'qotib, ushbu

$$M_k = q_k M_{k+1} + u_k \qquad (k = \overline{1, n-2}) \qquad (1.14)$$
$$M_{n-1} = u_{n-1}$$

ekvivalent sistemaga ega bo'lamiz. Bundan esa ketma-ket $M_{n-1}, M_{n-2}, \dots, M_1$ larni aniqlash mumkin.

Salmoqli bosh dizgonalga ega bo'lgan matritsalar uchun bu hisoblash sxemasi shu ma'noda turg'undirki, xato tez so'nib boradi ($0 < -q_k < 1$). Buni (2.13) va (2.14) dan osonlik bilan ko'rish mumkin. Shuni ham ta'kidlash kerakki, q_k va p_k miqdorlar faqat Δ_n to'rga bog'liq bo'lib, to'rning tugunlaridagi ordinatalarning qiymatlariga bog‘liq emas. Bu esa muayyan Δ_n to‘r uchun { p_k } va { q_k } larning qiymatlarini bir marta hisoblab olib, to‘r tugunlaridagi turli xil ordinatalar bilan splaynlar qurishga imkon beradi. Splaynni qurishda hisoblash natijalarini 1- jadvaldagi yozish ma’quldir.

x_k	f_k	h_k	a_k	b_k	c_k	d_k	p_k	q_k	u_k	M_k
x_1	f_1	h_1	a_1	b_1	c_1	d_1	p_1	q_1	u_1	M_1
x_2	f_2	h_2	a_2	b_2	c_2	d_2	p_2	q_2	u_2	M_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_{n-1}	f_{n-1}	h_{n-1}	a_{n-1}	b_{n-1}	c_{n-1}	d_{n-1}	p_{n-1}	q_{n-1}	u_{n-1}	M_{n-1}
x_n	f_n	h_n								

(1-jadval)

Agar Δ_n to‘r tekis, ya’ni tugunlar teng uzoqlikda jzylashgan bo‘lsa, u holda bu sxema yanada soddalashadi: h_k, a_k, b_k, c_k ustunlarni yozmaslik ham mumkin.

Shunday qilib, funksiyaning $f_0, f_1, \dots, f_n$ qiymatlari berilgan bo‘lsa, bu qiymatlardan foydalanie (2.6) formula yordamida splayn - funksiyalar bilan *f(x)* ni interpolyatsiyalash mumkin. (2.7) formula yordamida esa uniag hosilasini topish mumkin.

Kubik splayn - funksiyalar, yuqorida aytib o‘tilganimizdek yaxshi yaqinlashish xossasiga ega. Agar interpolyatsiyalanadigan *f(x)* funksiya $S^k\,[a,b]$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ sinfga tegishli bo‘lsa, u holda uning xatosi *r(x) =f(x) — S(f,x)* uchun quyidagi bahoni ko‘rsatysh mumkin:

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |r^{(p)}(x)| \leqslant ch^{k-p} \quad (k \geqslant p),$$

bu yerda s to‘rga bog‘liq bo‘lmagan o‘zgarmas bo‘lib, $\max\limits_{1\le i\le n} h_i$

Eslatma. Ko‘pincha $x = a$ va $x = b$ nuqtalarda f(x) funksiya haqida qo‘shimcha ma’lumotga ham ega bo‘lishimiz mumkin. Masalan, splayn tuzishdan asosiy maqsad

$$f(a) + \alpha f'(a) = A, \quad f(b) + \beta f'(b) = B$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi differensial tenglamani yechishdan iborat bo‘lishi mumkin. Bunday holda, splayn tuzishda $M_0 = M_n = 0$ chegaraviy shart o‘rniga yuqoridagi shartni olish kerak.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Isroilov M. «Hisoblash metodlari», T., "O`zbekiston", 2003
2. Shoxamidov Sh.Sh. «Amaliy matematika unsurlari», T., "O`zbekiston", 1997
3. Boyzoqov A., Qayumov Sh. «Hisoblash matematikasi asoslari», O`quv qo`llanma. Toshkent 2000.
4. Abduqodirov A.A. «Hisoblash matematikasi va programmalash», Toshkent. "O`qituvchi" 1989.
5. Vorob`eva G.N. i dr. «Praktikum po vichislitel'noy matematike» M. VSh. 1990.
6. Abduhamidov A., Xudoynazarov S. «Hisoblash usullaridan mashqlar va laboratoriya ishlari», T.1995.